



**MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS COM QUARTA ORDEM DE CONVERGÊNCIA PARA  
A ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS**

**INCREMENTAL AND ITERATIVE METHODS WITH FOURTH ORDER OF CONVERGENCE FOR  
THE NONLINEAR ANALYSIS OF RETICULATE STRUCTURES**

Luiz Antonio Farani de Souza<sup>1</sup>

e341283

<https://doi.org/10.47820/recima21.v3i4.1283>

PUBLICADO: 04/2022

**RESUMO**

O comportamento não linear de uma estrutura pode ser descrito pela sua trajetória de equilíbrio no espaço deslocamento versus carga, a qual é obtida iterativamente por resolver uma série de problemas lineares. Atualmente, procedimentos de análise estrutural têm atraído muita atenção devido à eficiência computacional, ao custo de análise, à viabilidade e à aplicabilidade. Nesse contexto, este artigo propõe dois procedimentos incrementais e iterativos com quarta ordem de convergência, com a finalidade de encontrar a solução aproximada do sistema de equações não lineares que descreve o problema. Análises estáticas de dois problemas com comportamento não linear geométrico – uma viga e uma coluna – são realizadas com o programa livre Scilab. As estruturas são discretizadas com a formulação Corrotacional do Método dos Elementos Finitos. As ligações são simuladas por meio de um elemento de ligação com comprimento nulo. As trajetórias de equilíbrio são obtidas utilizando a técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. A eficiência computacional dos métodos implementados é comparada com o procedimento incremental de Newton - Raphson padrão. Como conclusão, um dos algoritmos propostos conseguiu obter a solução aproximada dos problemas com menos iterações acumuladas e com menor tempo de processamento.

**PALAVRAS-CHAVE:** Análise Não Linear. Método de três passos. Elementos Finitos.

**ABSTRACT**

*The nonlinear behavior of a structure can be described by its equilibrium path in displacement versus load space, which is obtained iteratively by solving a series of linear problems. The nonlinear solution is obtained iteratively by solving a series of linear problems. Currently, analysis procedures have attracted much attention due to computational efficiency, analysis cost, feasibility and applicability. In this context, this paper proposes two incremental and iterative procedures with fourth order of convergence, in order to find the approximate solution of the system of nonlinear equations that describes the structural problem. Static analyzes of two problems with geometric nonlinear behavior – a beam and a column – are performed with the free program Scilab. The structures are discretized with the Corotational formulation of the Finite Element Method. Connections are simulated using a null-length connection element. Equilibrium paths are obtained using the Linear Arc-Length path-following technique. The computational efficiency of the implemented methods is compared with the standard Newton-Raphson incremental procedure. As a conclusion, one of the proposed algorithms was able to obtain the approximate solution of the problems with fewer accumulated iterations and shorter processing time.*

**KEYWORDS:** Nonlinear Analysis. Three-step method. Finite Elements.

**1 INTRODUÇÃO**

Em geral, a percepção e a identificação de problemas não lineares são um dos desafios controversos em diferentes disciplinas da ciência e tecnologia. Na atualidade, os procedimentos de

<sup>1</sup> Curso de Engenharia Civil - Universidade Tecnológica Federal do Paraná



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS COM QUARTA ORDEM DE CONVERGÊNCIA PARA A ANÁLISE  
NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS  
Luiz Antonio Farani de Souza

análise não linear tem atraído grande atenção no que tange à eficiência computacional, ao custo de análise, à viabilidade e à aplicabilidade (MAHDAVI *et al.*, 2015). Para efetuar a análise não linear de uma estrutura com maior precisão, é de fundamental importância que sejam empregados métodos incrementais e iterativos que possam considerar, de maneira apropriada, os efeitos de grandes rotações e grandes deslocamentos. A não linearidade geométrica está associada a equações de equilíbrio que são escritas considerando a configuração deformada da estrutura e a equações que relacionam a deformação e o deslocamento da estrutura considerada (RODRIGUES; VARELA; SOUZA, 2008).

Uma metodologia eficiente de solução deve ser capaz de superar os problemas numéricos associados ao comportamento não linear e, além disso, de traçar a trajetória de equilíbrio com pontos limites do sistema estrutural em análise (MAXIMIANO; SILVA; SILVEIRA, 2014). O procedimento incremental e iterativo de Newton-Raphson é um dos métodos mais utilizados para resolver problemas não lineares na Engenharia Estrutural.

Pesquisas têm sido conduzidas com relação à implementação de métodos com terceira ou quarta ordem de convergência para a solução do sistema de equações não lineares que descreve o problema estrutural. Saffari e Mansouri (2011) desenvolveram um método de dois passos com convergência de quarta ordem, o qual é aplicado em treliças espaciais com comportamento não linear geométrico. Mahdavi *et al.* (2015) propuseram um método iterativo com três passos livre de derivada de segunda ordem e originado de Chebyshev modificado e de esquemas de *spline* cúbica. Souza *et al.* (2018) apresentaram algoritmos baseados nos métodos iterativos de dois passos de Potra-Pták, Chebyshev e Super-Halley, combinados com a técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. Souza *et al.* (2021) desenvolveram um novo algoritmo para resolver o sistema de equações não lineares que descreve o equilíbrio estático de treliças com as não linearidades física e geométrica, adaptando um método de três passos com convergência de quarta ordem. Souza, Castelani e Shirabayashi (2021) propuseram um método híbrido por meio da combinação dos algoritmos de Newton-Raphson padrão, Newton-Raphson modificado e Potra-Pták, inserindo uma condição no ciclo iterativo.

Neste artigo são apresentados dois procedimentos incrementais e iterativos, com o objetivo de encontrar a solução aproximada do sistema de equações não lineares. Tais procedimentos são desenvolvidos a partir de uma adaptação de dois métodos iterativos e com quarta ordem de convergência propostos por Herceg e Herceg (2007), os quais foram desenvolvidos para encontrar a raiz de uma função não linear com uma variável.

Os resultados numéricos de dois problemas com não linearidade geométrica encontrados na literatura (uma coluna e uma viga) são obtidos com um código computacional desenvolvido com o programa livre Scilab, versão 6.1.1 (SCILAB, 2021). Para a discretização das estruturas foi utilizada a formulação Corrotacional do Método dos Elementos Finitos (YAW, 2009; TANG; ZHOU; CHAN, 2015).



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS COM QUARTA ORDEM DE CONVERGÊNCIA PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS  
Luiz Antonio Farani de Souza

As conexões no apoio foram simuladas por meio de um elemento de ligação com comprimento nulo proposto por Del Savio *et al.* (2005), cuja matriz de rigidez é escrita em função das rigidezes axial, translacional e rotacional. As trajetórias de equilíbrio das estruturas são obtidas utilizando a técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. A eficiência computacional dos métodos implementados é comparada com o procedimento clássico de Newton-Raphson.

## 2 METODOLOGIA

### 2.1 Problema estrutural e métodos de solução

O problema básico da análise não linear é encontrar a configuração de equilíbrio de uma estrutura que está sob a ação de um carregamento aplicado. O sistema de equações não lineares que descreve o equilíbrio estático de um sistema estrutural com comportamento não linear geométrico é descrito por (SOUZA et al., 2018):

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda) = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

na qual  $\mathbf{g}$  é o vetor de forças residuais,  $\mathbf{F}_{int}$  é o vetor de esforços internos (avaliado em função do vetor de deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ ) e  $\lambda$  é o parâmetro de carga responsável pelo escalonamento do vetor de forças externas  $\mathbf{F}_r$ . O sistema dado em Equação (1) tem  $(n + 1)$  incógnitas, que são o vetor  $\mathbf{u}$  com  $n$  elementos e o parâmetro  $\lambda$ , mas somente  $n$  equações. Assim, uma equação de restrição  $c(\mathbf{u}, \lambda) = 0$  é adicionada ao sistema.

A solução aproximada desse sistema é obtida por meio de um procedimento incremental e iterativo, em que para uma sequência do parâmetro de carga  $\lambda$  determina-se uma sequência correspondente de deslocamentos  $\mathbf{u}$ . Herceg e Herceg (2007) desenvolveram métodos numéricos com quarta ordem de convergência fazendo modificações no método de Newton para encontrar uma raiz da equação não linear  $f(x) = 0$ . Tais métodos foram adaptados neste trabalho para o problema estrutural num procedimento incremental e iterativo. O primeiro método (intitulado aqui de método "1") tem dois passos e suas equações iterativas são dadas por:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} - \delta \mathbf{u}_2^{(k+1)}, \quad (2)$$

$$\delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} [\delta \lambda_1^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})], \quad (3)$$

$$\delta \mathbf{u}_2^{(k+1)} = \left[ \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)}) - 3\mathbf{K} \left( \mathbf{u}^{(k)} + \frac{2}{3} \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} \right) \right]^{-1} [\delta \lambda_2^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})], \quad (4)$$

tal que  $k = 1, 2, \dots$ . O segundo método (método "2") tem três passos e seu esquema iterativo é:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} + \frac{3}{2} \delta \mathbf{u}_2^{(k+1)} - 3\delta \mathbf{u}_3^{(k+1)}, \quad (5)$$

$$\delta \mathbf{u}_2^{(k+1)} = \left[ \mathbf{K} \left( \mathbf{u}^{(k)} + \frac{2}{3} \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} \right) \right]^{-1} [\delta \lambda_3^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})], \quad (6)$$

$$\delta \mathbf{u}_3^{(k+1)} = \left[ \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{K} \left( \mathbf{u}^{(k)} + \frac{2}{3} \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)} \right) \right]^{-1} [\delta \lambda_4^{(k+1)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})]. \quad (7)$$

O processo iterativo de Newton-Raphson padrão é descrito pela seguinte equação:



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR

ISSN 2675-6218

MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS COM QUARTA ORDEM DE CONVERGÊNCIA PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS  
Luiz Antonio Farani de Souza

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k+1)}. \quad (8)$$

O subincremento de deslocamento  $\delta \mathbf{u}_1^{(k+1)}$  nas Equações (5) a (8) é calculado conforme a Equação (3) (CRISFIELD, 1991). O parâmetro total de carga ( $\lambda$ ) no passo de carga ( $t + \Delta t$ ) e na iteração corrente ( $k + 1$ ) é atualizado por:

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta \lambda_2^{(k+1)} \quad (\text{Método "1"}), \quad (9)$$

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta \lambda_4^{(k+1)} \quad (\text{Método "2"}). \quad (10)$$

Os métodos de solução são associados à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear proposta por Ramm (1981). As expressões para a determinação do subincremento do parâmetro de carga  $\delta \lambda_i^{(k+1)}$ , com  $i = 1, \dots, 4$ , são dadas por:

$$\delta \lambda_1^{(k+1)} = - \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k+1)T} [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\Delta \mathbf{u}^{(k+1)T} [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} \mathbf{F}_r}, \quad (11)$$

$$\delta \lambda_2^{(k+1)} = - \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k+1)T} [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)}) - 3\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)} + \frac{2}{3}\delta \mathbf{u}_1^{(k+1)})]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\Delta \mathbf{u}^{(k+1)T} [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)}) - 3\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)} + \frac{2}{3}\delta \mathbf{u}_1^{(k+1)})]^{-1} \mathbf{F}_r}, \quad (12)$$

$$\delta \lambda_3^{(k+1)} = - \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k+1)T} [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)} + \frac{2}{3}\delta \mathbf{u}_1^{(k+1)})]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\Delta \mathbf{u}^{(k+1)T} [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)} + \frac{2}{3}\delta \mathbf{u}_1^{(k+1)})]^{-1} \mathbf{F}_r}, \quad (13)$$

$$\delta \lambda_4^{(k+1)} = - \frac{\Delta \mathbf{u}^{(k+1)T} [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)} + \frac{2}{3}\delta \mathbf{u}_1^{(k+1)})]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}, \lambda^{(k)})}{\Delta \mathbf{u}^{(k+1)T} [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)} + \frac{2}{3}\delta \mathbf{u}_1^{(k+1)})]^{-1} \mathbf{F}_r}. \quad (14)$$

A expressão para o incremento inicial do parâmetro de carga (solução predita) é dada por ( $k = 0$ ):

$$\Delta \lambda^{(0)} = \frac{\Delta l}{\|\delta \mathbf{u}_r\|}, \quad (15)$$

em que  $\Delta l$  representa o incremento de comprimento de arco. Esse incremento pode ser utilizado como um parâmetro de controle no passo de carga corrente de acordo com a expressão:

$$\Delta l = {}^0 \Delta l \left( \frac{k_d}{t_k} \right)^{0,5}, \quad (16)$$

na qual  ${}^0 \Delta l$  representa o incremento de comprimento de arco no passo de carga inicial,  $k_d$  é o número desejável de iterações para a convergência do processo iterativo corrente e  $t_k$  é o número de iterações que foi necessário para convergir no passo de carga anterior.

O processo iterativo termina indicando uma nova posição de equilíbrio (um ponto na trajetória deslocamento *versus* força) para o sistema estrutural. A convergência para a solução aproximada no passo de carga corrente ocorre quando um destes ou ambos os critérios forem atendidos:

1. Critério baseado em forças:



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS COM QUARTA ORDEM DE CONVERGÊNCIA PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS  
Luiz Antonio Farani de Souza

$$\|g^{(k+1)}\| = tol_1 \|F_r\|, \quad (17)$$

2. Critério baseado em deslocamentos:

$$\|\delta u_i^{(k+1)}\| = tol_2 \|\Delta u^{(k+1)}\|. \quad (18)$$

Nas Equações (17) e (18),  $\|\cdot\|$  é a norma Euclidiana,  $tol_1$  e  $tol_2$  são as tolerâncias informadas pelo usuário e  $\Delta u^{(k+1)}$  é o vetor incremento de deslocamentos. Esse vetor é avaliado pelas seguintes equações, conforme o método de solução:

$$\Delta u^{(k+1)} = \Delta u^{(k)} + \delta u_1^{(k+1)} \quad (\text{Newton - Raphson}), \quad (19)$$

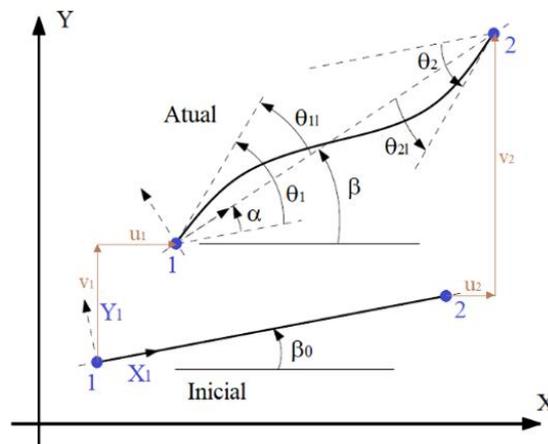
$$\Delta u^{(k+1)} = \Delta u^{(k)} + \frac{1}{2} \delta u_1^{(k+1)} - \delta u_2^{(k+1)} \quad (\text{Método "1"}), \quad (20)$$

$$\Delta u^{(k+1)} = \Delta u^{(k)} + \delta u_1^{(k+1)} + \frac{3}{2} \delta u_2^{(k+1)} - 3\delta u_3^{(k+1)} \quad (\text{Método "2"}). \quad (21)$$

### 2.2 Elemento finito corrotacional de viga-pilar

O elemento finito de viga-pilar tem dois nós e três graus de liberdade por nó. Assume-se que não há deformação de cisalhamento na viga e, então, a seção transversal permanece plana e normal ao seu eixo (teoria de viga de Euler-Bernoulli para a flexão). Considere esse elemento em suas configurações inicial e atual, conforme o desenho esquemático na Figura 1.

Figura 1 - Configurações inicial e atual do elemento de viga-pilar.



Fonte: adaptada de Yaw (2009).

Na configuração inicial, as coordenadas dos nós "1" e "2" do elemento no sistema cartesiano global são  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$ , respectivamente. O comprimento inicial (indeformado)  $L_0$  do mesmo é dado pela seguinte equação (YAW, 2009):

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}. \quad (22)$$

Para o elemento na sua configuração atual, as coordenadas nodais globais são  $(X_1 + u_1, Y_1 + v_1)$  para o nó "1" e  $(X_2 + u_2, Y_2 + v_2)$  para o nó "2", em que  $u_i$  é o deslocamento do nó  $i$  na direção  $X$  e



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR

ISSN 2675-6218

MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS COM QUARTA ORDEM DE CONVERGÊNCIA PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS  
Luiz Antonio Farani de Souza

$v_i$  é o deslocamento do nó  $i$  na direção  $Y$ , com  $i = 1, 2$ . O comprimento atual (deformado)  $L$  é (YAW, 2009):

$$L = \sqrt{(X_2 + u_2 - X_1 - u_1)^2 + (Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1)^2}. \quad (23)$$

O vetor de deslocamentos do elemento finito ( $\mathbf{p}_m$ ) no sistema de coordenadas globais é dado por:

$$\mathbf{p}_m = [u_1 \quad v_1 \quad \theta_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \theta_2]^T. \quad (24)$$

O deslocamento axial local ( $u_l$ ) do elemento é calculado por:

$$u_l = L - L_0. \quad (25)$$

A deformação específica de Engenharia  $\varepsilon$  é assumida constante e é determinada por  $\varepsilon = u_l/L_0$ .

A força axial  $N$  é, então, dada por:

$$N = \frac{EAu_l}{L_0}, \quad (26)$$

na qual  $A$  é a área da seção transversal e é o módulo de elasticidade longitudinal. Usando a análise estrutural padrão, os momentos locais nas extremidades do elemento de viga-pilar ( $\bar{M}_1$  e  $\bar{M}_2$ ) são relacionados com as rotações nodais locais ( $\theta_{1l}$  e  $\theta_{2l}$ ), e são dados por (CRISFIELD, 1991; YAW, 2009):

$$\begin{bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{2EI}{L_0} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{1l} \\ \theta_{2l} \end{bmatrix}, \quad (27)$$

na qual  $I$  é o momento de inércia da seção transversal. As rotações nodais locais ( $\theta_{1l}$  e  $\theta_{2l}$ ) são computadas por, respectivamente:

$$\theta_{1l} = \arctan\left(\frac{\cos\beta \sin\beta_1 - \sin\beta \cos\beta_1}{\cos\beta \cos\beta_1 + \sin\beta \sin\beta_1}\right), \quad (28)$$

$$\theta_{2l} = \arctan\left(\frac{\cos\beta \sin\beta_2 - \sin\beta \cos\beta_2}{\cos\beta \cos\beta_2 + \sin\beta \sin\beta_2}\right), \quad (29)$$

sendo  $\beta_1 = \theta_1 + \beta_0$  e  $\beta_2 = \theta_2 + \beta_0$ . Os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são as rotações nodais globais calculadas do sistema de equações globais. As expressões para o ângulo inicial  $\beta_0$  e o para o ângulo corrente  $\beta$  da barra são, respectivamente:

$$\beta_0 = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right), \quad (30)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}\right). \quad (31)$$

A matriz de rigidez tangente elementar  $\mathbf{K}_{el}$  é determinada em função de duas parcelas, que são a matriz de rigidez dependente do material  $\mathbf{K}_M$  e a matriz de rigidez geométrica ou das tensões iniciais  $\mathbf{K}_G$ , sendo expressa por:

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G, \quad (32)$$

na qual

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}, \quad (33)$$



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS COM QUARTA ORDEM DE CONVERGÊNCIA PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS  
Luiz Antonio Farani de Souza

$$\mathbf{K}_G = \frac{N}{L} \mathbf{z}\mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{r}\mathbf{z}^T + \mathbf{z}\mathbf{r}^T). \quad (34)$$

A matriz constitutiva  $\mathbf{D}$  na Equação (33) é dada por:

$$\mathbf{D} = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4k_z^2 & 2k_z^2 \\ 0 & 2rk_z^2 & 4k_z^2 \end{bmatrix}, \quad (35)$$

em que  $k_z = \sqrt{I/A}$  é o raio de giração e a matriz  $\mathbf{B}$  é:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -c & -s & 0 & c & s & 0 \\ -s/L & c/L & 1 & s/L & -c/L & 0 \\ -s/L & c/L & 0 & s/L & -c/L & 1 \end{bmatrix}. \quad (36)$$

Os vetores  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{r}$  na Equação (34) são, respectivamente:

$$\mathbf{z} = [s \quad -c \quad 0 \quad -s \quad c \quad 0]^T, \quad (37)$$

$$\mathbf{r} = [-c \quad -s \quad 0 \quad c \quad s \quad 0]^T. \quad (38)$$

As expressões para calcular os valores do seno e do cosseno do ângulo  $\beta$ , denotados por  $s$  e  $c$  nas Equações (37) e (38), são, respectivamente:

$$\cos(\beta) = \frac{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}{L}, \quad (39)$$

$$\sin(\beta) = \frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{L}. \quad (40)$$

O vetor de forças internas elementar  $\mathbf{F}_{el}$  é determinado por:

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{B}^T [N \quad \bar{M}_1 \quad \bar{M}_2]^T \quad (41)$$

### 2.3 Elemento finito de ligação com espessura nula

As conexões são simuladas pelo elemento de ligação com espessura nula proposto por Del Savio *et al.* (2005). A matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{lig}$  desse elemento pode ser expressa matematicamente por:

$$\mathbf{K}_{lig} = \begin{bmatrix} \mathbf{S} & -\mathbf{S} \\ -\mathbf{S} & \mathbf{S} \end{bmatrix}, \quad (42)$$

com

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_a & 0 & 0 \\ 0 & S_t & 0 \\ 0 & 0 & S_r \end{bmatrix}. \quad (43)$$

em que  $S_a$ ,  $S_t$  e  $S_r$  são as rigidezes axial, translacional e rotacional, respectivamente. Nas análises não lineares geométricas, quando se adota o modelo linear de ligação, a matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{lig}$  é mantida invariável no processo iterativo e incremental (ou seja,  $S_a$ ,  $S_t$  e  $S_r$  permanecem constantes).

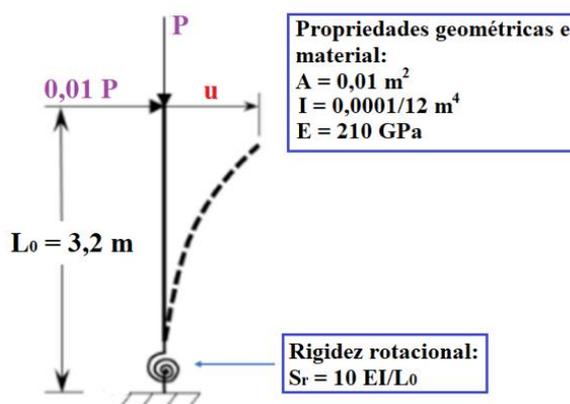
Segundo Chen, Goto e Liew (1996), em geral os esforços axial, de cisalhamento, de flexão e de torção são transmitidos à conexão. Para os exemplos numéricos estudados neste trabalho, contudo, os efeitos das rigidezes axial e translacional são desprezados e valores numéricos grandes são adotados para essas rigidezes tal que  $S_a \cong \infty$  e  $S_t \cong \infty$ . Portanto, considera-se somente o efeito provocado pelo momento fletor, variando-se a rigidez rotacional  $S_r$ . No caso de a ligação ser idealmente flexível considera-se  $S_r = 0$  e para ligação totalmente rígida,  $S_r \cong \infty$ .

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

#### 3.1 Exemplo numérico 1 – coluna

A Figura 2 mostra uma coluna com ligação semirrígida de rigidez rotacional  $S_r$  e submetida a duas forças concentradas. As suas propriedades geométricas (momento de inércia  $I$  e área  $A$  da seção transversal) e material (módulo de elasticidade longitudinal  $E$ ) estão indicadas nessa figura. A malha de elementos finitos consiste em 10 nós e de oito elementos de viga–pilar e um elemento de ligação. Os parâmetros de entrada para os métodos de solução são: comprimento de arco inicial  ${}^0\Delta l = 0,05$ ; número de iterações desejáveis por passo de carga  $K_d = 5$ ; número máximo de iterações por passo de carga  $k_{máx} = 150$ ; tolerâncias para o critério de convergência  $tol_1 = tol_2 = 1,0 \times 10^{-10}$ ; e incremento de carga  $\Delta P = 1,0$  N.

Figura 2 - Modelo estrutural da coluna.



Fonte: adaptada de Van Hai, Nghiem e Cuong (2019).

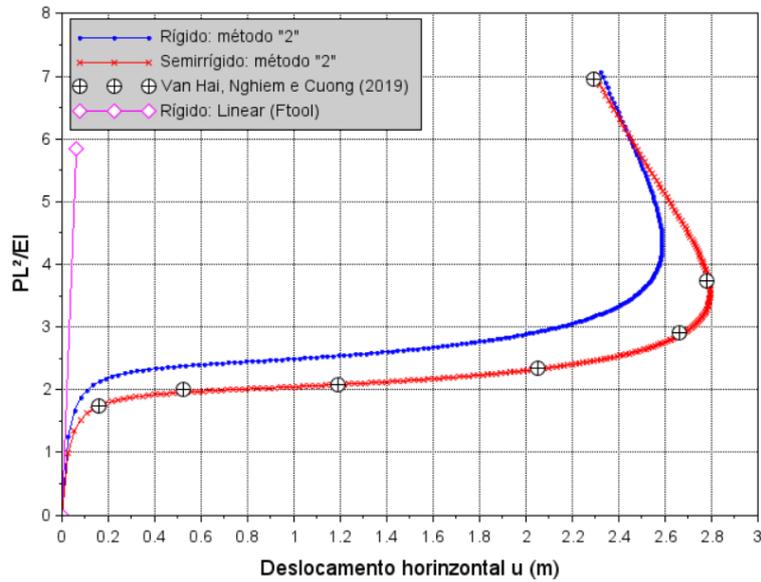
As trajetórias de equilíbrio da estrutura obtida com o método “2” são mostradas na Figura 3, adotando-se o apoio como rígido ( $S_r = 1,0 \times 10^{15}$ ) ou semirrígido ( $S_r = 10 EI/L_0$ ), havendo boa concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por Van Hai, Nghiem e Cuong (2019). Além disso, é apresentada a trajetória da coluna com apoio rígido supondo a análise linear (hipótese de deformações infinitesimais), a qual é obtida com o programa Ftool (MARTHA, 2018). Na Figura 4 são apresentadas as configurações deformadas ( $NP = 30, 60, 90$  ou  $119$ ) e indeformada ( $NP = 0$ ) da estrutura. Na Tabela 1 aparecem os resultados numéricos obtidos com os métodos implementados para a coluna com apoio semirrígido, com relação aos seguintes parâmetros – números totais de passos de carga ( $NP$ ) e iterações acumuladas ( $K_{total}$ ) até a convergência para a solução aproximada; número médio de iterações por passo de carga ( $K_{médio}$ ); e tempo de processamento em segundos ( $t$ ).



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

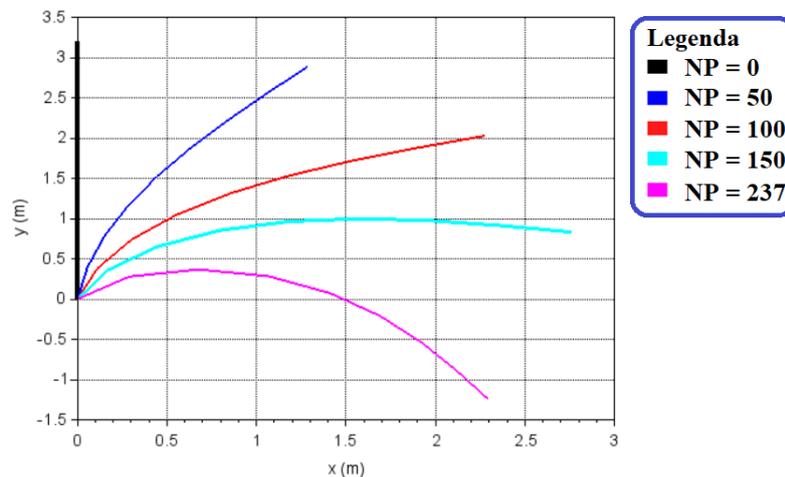
MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS COM QUARTA ORDEM DE CONVERGÊNCIA PARA A ANÁLISE  
NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS  
Luiz Antonio Farani de Souza

Figura 3 - Trajetória de equilíbrio da coluna.



Fonte: Autoria própria.

Figura 4 - Configurações indeformada e deformada da coluna.



Fonte: Autoria própria.

Tabela 1 - Resultados numéricos para a coluna com apoio semirrígido (número total de incógnitas: 31).

Método de Solução	NP	$k_{total}$	$k_{médio}$	t (s)
Método "1"	237	476	2,008	6,980
Método "2"	237	237	1,000	4,222
Newton - Raphson Padrão	237	714	3,012	6,275

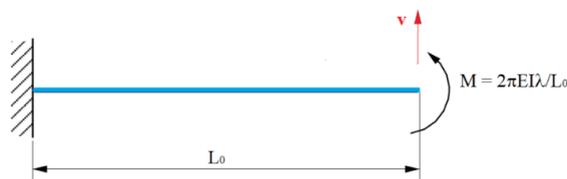
Fonte: Autoria própria.



### 3.2 Exemplo numérico 2 – viga em balanço

Seja a viga engastada em uma de suas extremidades e submetida a um momento fletor na extremidade livre, conforme o modelo estrutural mostrado na Figura 5. A estrutura tem comprimento  $L_0 = 1,0$  m, seção transversal retangular  $(1,0 \times 0,1)$  m<sup>2</sup> e módulo de elasticidade  $E = 210$  GPa. A malha de elementos finitos consiste em 11 elementos de viga - pilar, um elemento de ligação e 12 nós. Neste estudo, o momento fletor aplicado na extremidade foi aumentado variando-se o parâmetro de carga  $\lambda$  de 0 até aproximadamente 2,0. Os parâmetros de entrada são:  ${}^0\Delta l = 0,6$ ;  $K_d = 7$ ;  $k_{máx} = 150$ ;  $tol_1 = tol_2 = 1,0 \times 10^{-10}$ ; e  $\Delta P = 2 \pi EI/L_0$  N m. A rigidez rotacional no apoio é adotada  $S_r = 1,0 \times 10^{15}$ , a qual simula a ligação rígida.

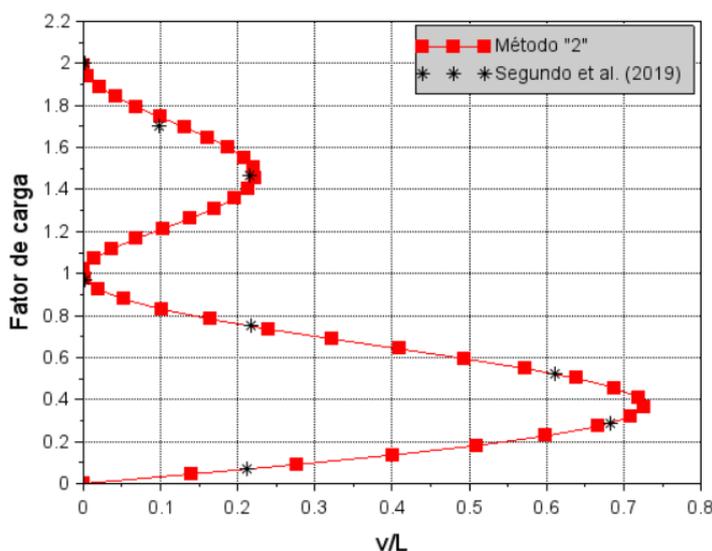
Figura 5 - Modelo estrutural da viga em balanço.



Fonte: adaptada de Segundo et al., (2019).

A trajetória de equilíbrio da estrutura com o método "2" é apresentada na Figura 6, havendo boa concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por Segundo et al. (2019). As configurações deformadas da viga para os passos de carga  $NP = 0, 10, 20, 30$  e  $42$  são mostradas na Figura 7. Na Tabela 2 aparecem os resultados numéricos obtidos com os métodos implementados ( $NP$ ,  $k_{total}$ ,  $k_{médio}$  e  $t$ ).

Figura 6 - Trajetória de equilíbrio da viga.



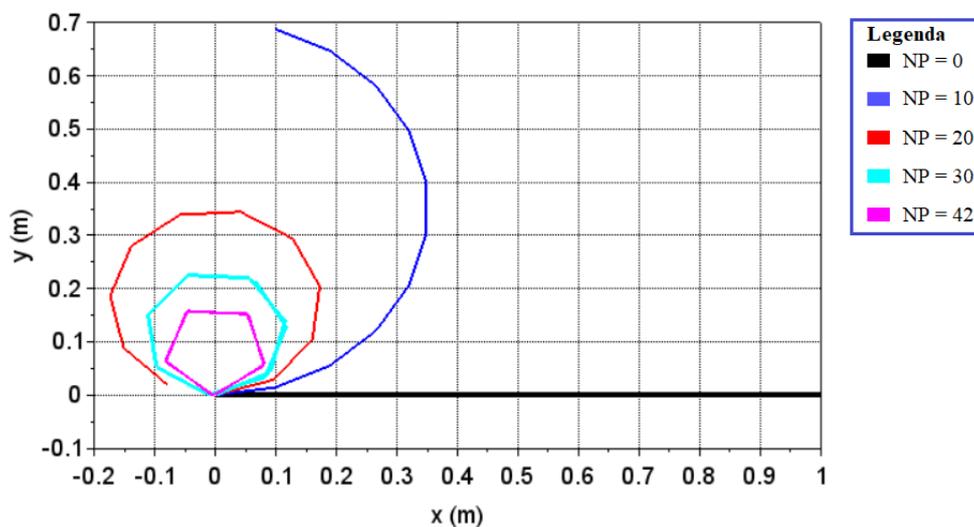
Fonte: Autoria própria.



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS COM QUARTA ORDEM DE CONVERGÊNCIA PARA A ANÁLISE  
NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS  
Luiz Antonio Farani de Souza

Figura 7 - Configurações deformadas da viga.



Fonte: Autoria própria.

Tabela 2 - Resultados numéricos da viga (número total de incógnitas: 37).

Método de Solução	NP	$k_{total}$	$k_{médio}$	t (s)
Método "1"	42	84	2,000	2,055
Método "2"	42	42	1,000	1,278
Newton-Raphson Padrão	42	126	3,000	1,942

Fonte: Autoria própria.

### 3.3 Discussão dos resultados

Na Figura 8 são apresentadas as reduções (em %) no número total de iterações até a convergência para a solução obtidas com o método "2" em comparação com os demais métodos, para os exemplos numéricos da coluna e da viga, respectivamente. Apesar do maior custo computacional do método "2", uma vez que há a resolução de seis sistemas de equações lineares e duas atualizações da matriz de rigidez  $K$  a cada iteração (ver as Equações (5) a (7)), ele alcança a solução dos problemas estudados com menor tempo de processamento, conforme pode ser verificado nas Tabelas 1 e 2.

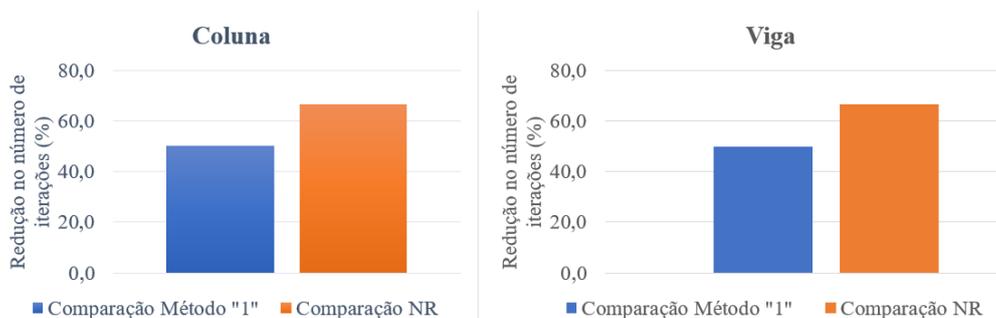
Nas simulações com os métodos numéricos, os sistemas de equações lineares são resolvidos pelo método direto Fatoração LU. A matriz de rigidez  $K$  gerada pelo Método Corrotacional dos Elementos Finitos é, em geral, uma matriz esparsa e do tipo banda, pois possui uma grande quantidade de elementos com valor zero. A Figura 9 apresenta o padrão de elementos não nulos da matriz de rigidez  $K$  da viga em balanço utilizando as funções  $sparse(K)$  e  $PlotSparse(K)$  do Scilab, em que  $nnz$  é o número de entradas não nulas da matriz. O grau de esparsidade (porcentagem de elementos nulos) dessa matriz é 78,24 %.



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

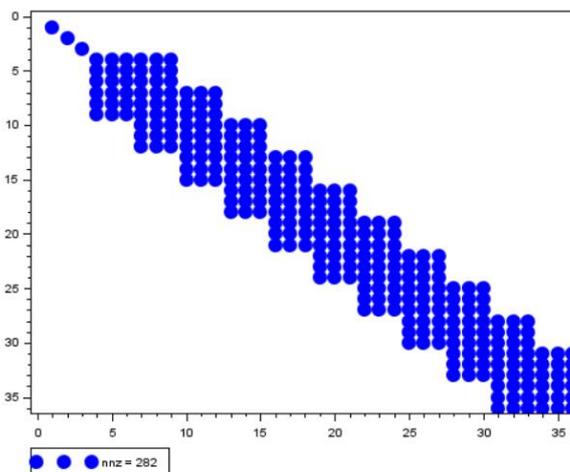
MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS COM QUARTA ORDEM DE CONVERGÊNCIA PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS  
Luiz Antonio Farani de Souza

Figura 8 - Reduções no número de iterações obtidas com o método "2".



Fonte: Autoria própria.

Figura 9 - Padrão de elementos não nulos da matriz de rigidez  $K$  da viga.



Fonte: Autoria própria.

Deve-se ressaltar, contudo, que os problemas numéricos resolvidos aqui são de pequena escala no contexto computacional atual, porque possuem menos de 40 graus de liberdade. Para sistemas lineares dessa ordem de grandeza, métodos diretos costumam ser mais eficientes. Os métodos iterativos de solução (por exemplo, o Método do Gradiente Conjugado pré-condicionado) são vantajosos quando os problemas tiverem um número maior de graus de liberdade e recursos de alocação de memória. Para efetuar as operações matemáticas somente com elementos não nulos na resolução de sistemas esparsos pelo método Fatoração LU, podem-se implementar as linhas de código na Figura 10.



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS COM QUARTA ORDEM DE CONVERGÊNCIA PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS  
Luiz Antonio Farani de Souza

Figura 10 - Linhas de código para a resolução de sistemas esparsos por Fatoração LU utilizando funções do Scilab.

```
K=sparse(K) //gera a matriz K esparsa somente com os elementos não nulos
[h,rk]=lufact(K); //realiza a fatoração LU da matriz esparsa K
u=lusolve(h,g); //resolve o sistema linear Ku = g
```

Fonte: Autoria própria.

Na análise estrutural, as ligações que unem os elementos estruturais são comumente idealizadas, quanto à capacidade de transferir momento e permitir o giro relativo entre as barras, como rígidas ou rotuladas. No entanto, o comportamento real dessas ligações na prática é bem distinto do considerado na análise convencional. A impossibilidade de garantir o perfeito engastamento pelas ligações pode acabar por gerar efeitos locais e imperfeições que podem induzir a um comportamento global não linear da estrutura. Nesse caso, fica evidente a discrepância das trajetórias não lineares da coluna (ver a Figura 3) quando se considera o apoio como rígido ou semirrígido. Os deslocamentos de uma estrutura estão relacionados a sua rigidez e, como as ligações fazem parte dela, uma alteração na rigidez rotacional pode influenciar significativamente na distribuição dos esforços internos, nas deflexões e na estabilidade global da mesma.

Uma estrutura pode ter comportamento não linear ainda que seja constituída de material elástico linear (obedece à Lei de Hooke). Na análise estrutural linear, supõe-se que os deslocamentos nodais sejam infinitesimais. Contudo, ao considerar a não linearidade geométrica, supõe-se que a estrutura sofre pequenas deformações, mas os deslocamentos e as rotações nodais são finitos.

A consideração dessa não linearidade pode ocasionar na estrutura mudanças significativas no seu comportamento mecânico à medida que se aumenta a intensidade do carregamento, como pode ser observado nas trajetórias de equilíbrio das Figuras 3 e 5. As deformações axiais que surgem na coluna e na viga devido aos grandes deslocamentos acabam por gerar momentos fletores adicionais na estrutura em virtude da presença da força normal. Nota-se na formulação corrotacional, que a força normal  $N$  influencia na parcela geométrica da matriz de rigidez (ver a Equação (34)).

O modelo linear da ligação é simples de ser utilizado, posto que a rigidez rotacional inicial  $S_r$  pode ser obtida de experimentos em laboratório (diagrama momento  $M$  versus rotação relativa  $\varphi$  da ligação). Sua implementação em uma sub-rotina é relativamente fácil, uma vez que a matriz de rigidez é escrita em função de três rigidezes somente (ver as Equações (42) e (43)), e permanecem constantes ao longo do processo incremental-iterativo.

#### 4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base nos resultados numéricos, o método “2” mostrou-se mais eficiente do ponto de vista computacional em comparação com os demais métodos, porque alcançou as soluções aproximadas dos problemas estudados com menor número de iterações acumuladas e menor tempo



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS COM QUARTA ORDEM DE CONVERGÊNCIA PARA A ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS  
Luiz Antonio Farani de Souza

de processamento, para as tolerâncias consideradas. A técnica de continuação Comprimento de Arco Linear foi capaz de traçar as trajetórias não lineares de equilíbrio.

Destaca-se que a consideração da semirrígidez na análise estrutural permite representar mais adequadamente o comportamento real das ligações entre elementos estruturais, além de conferir maior confiabilidade e segurança ao engenheiro projetista.

Como continuidade da pesquisa são sugeridos os seguintes estudos: a consideração da não linearidade física nas análises; a implementação de outras técnicas de continuação (Comprimento de Arco Cilíndrico, Deslocamento Generalizado, Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais, entre outras); a aplicação dos métodos de solução propostos em problemas com maior número de incógnitas; a consideração do efeito da deformação por cisalhamento na seção (teoria de viga de Timoshenko); e a implementação de modelos não lineares da ligação.

### REFERÊNCIAS

CHEN, W. F.; GOTO, Y.; LIEW, J. R. **Stability design of semi-rigid frames**. New York, USA: John Wiley & Sons, 1996.

CRISFIELD M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltda, 1991. Vol 1.

DEL SAVIO, A. A.; ANDRADE, S. A. L.; MARTHA, L. F.; SILVA VELLASCO, P. C. G. Um sistema não-linear para análise de pórticos planos semi-rígidos. **Revista Sul-Americana de Engenharia Estrutural**, Passo Fundo, v. 2, n. 1, p. 97-125, 2005.

HERCEG, D.; HERCEG, D. Some fourth-order methods for nonlinear equations. **Novi Sad J. Math**, v. 37, n. 2, p. 241-247, 2007.

MAHDAVI, S. H.; RAZAK, H. A.; SHOJAEI, S.; MAHDAVI, M. S. A comparative study on application of Chebyshev and spline methods for geometrically non-linear analysis of truss structures. **International Journal of Mechanical Sciences**, v. 101, p. 241-251, 2015.

MARTHA, L. F. **Ftool – Two-Dimensional Frame Analysis Tool**. Versão 4.00.04. Rio de Janeiro: Tecgraf/PUC-Rio, 2018.

MAXIMIANO, D. P.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M. Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. **Revista Escola de Minas (Impresso)**, v. 67, n. 2, p. 143-150, 2014.

RAMM, E. Strategies for tracing the nonlinear response near limit points. In: **Nonlinear finite element analysis in structural mechanics**. Berlin, Heidelberg: Springer, 1981. p. 63-89.

RODRIGUES, P. F. N.; VARELA, W. D.; SOUZA, R. A. Análise de Estratégias de Solução do Problema Não-linear. **Revista de Ciência & Tecnologia**, v. 8, n. 2, p. 36-49, 2008.

SAFFARI, H.; MANSOURI, I. Non-linear analysis of structures using two-point method. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 46, n. 6, p. 834-840, 2011.



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS COM QUARTA ORDEM DE CONVERGÊNCIA PARA A ANÁLISE  
NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS RETICULADAS  
Luiz Antonio Farani de Souza

**SCILAB, versão 6.1.1.** France: ESI Group, 2021.

SEGUNDO, J. S. R.; SILVEIRA, R. A. M.; SILVA, A. R. D.; BARROS, R. C. Combinando as técnicas de busca linear com continuação para a solução de problemas estruturais não lineares. *In: XL IBERO-LATIN AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING*, 11-14 novembro, 2019, Natal, Brasil. **Anais...** Natal: XL CILAMCE, 2019.

SOUZA, L. A. F. D.; CASTELANI, E. V.; SHIRABAYASHI, W. V. I.; ALIANO, A.; MACHADO, R. D. Trusses nonlinear problems solution with numerical methods of cubic convergence order. **TEMA (São Carlos)**, v. 19, p. 161-179, 2018.

SOUZA, L. A. F. D.; SANTOS, D. F. D.; KAWAMOTO, R. Y. M.; VANALLI, L. New fourth-order convergent algorithm for analysis of trusses with material and geometric nonlinearities. **The Journal of Strain Analysis for Engineering Design**, p. 03093247211000528, 2021.

SOUZA, L. A. F.; CASTELANI, E. V.; SHIRABAYASHI, W. V. I. Adaptation of the Newton-Raphson and Potra-Pták methods for the solution of nonlinear systems. **Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas**, v. 42, n. 1, p. 63-74, 2021.

TANG, Y. Q.; ZHOU, Z. H.; CHAN, S. L. Nonlinear beam-column element under consistent deformation. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 15, n. 05, p. 1450068, 2015.

VAN HAI, N.; NGHIEM, D. N. T.; CUONG, N. H. Large displacement elastic analysis of planar steel frames with flexible beam-to-column connections under static loads by corotational beam-column element. **Journal of Science and Technology in Civil Engineering (STCE)-NUCE**, v. 13, n. 3, p. 85-94, 2019.

YAW, L. L. **2D Co-rotational Truss Formulation**. Walla Walla University, 2009.