RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

DUAS FUNÇÕES DENSIDADE DE PROBABILIDADE CONSTRUÍDAS A PARTIR DA RAZÃO ÁUREA

TWO PROBABILITY DENSITY FUNCTIONS CONSTRUCTED FROM THE GOLDEN RATIO

DOS FUNCIONES DE DENSIDAD DE PROBABILIDAD CONSTRUIDAS A PARTIR DE LA PROPORCIÓN ÁUREA

Alex Rodrigo dos Santos Sousa[1]

e391859
https://doi.org/10.47820/recima21.v3i9.1859
PUBLICADO: 09/2022

RESUMO
A razão áurea é uma das constantes mais conhecidas e investigadas da Matemática devido às suas propriedades geométricas e algébricas. Sua utilização remonta à Antiguidade, para a construção de pentágonos regulares e alguns sólidos platônicos. O presente trabalho propõe a construção de duas funções densidades de probabilidade que dependem da razão áurea e o cálculo de suas características, como função de distribuição acumulada, valor esperado e variância. A importância desta construção se dá pelo seu aspecto pedagógico, por meio da utilização de conceitos de funções, cálculo e teoria de probabilidades.

PALAVRAS-CHAVE: Razão áurea. Probabilidade. Funções.

ABSTRACT
The golden ratio is one of the best known and most investigated constants in Mathematics due to its geometric and algebraic properties. Its use dates to Antiquity, for the construction of regular pentagons and some Platonic solids. The present work proposes the construction of two probability density functions that depend on the golden ratio and the calculation of their characteristics, such as cumulative distribution function, expected value and variance. The importance of this construction is due to its pedagogical aspect, using concepts of functions, calculus and probability theory.

KEYWORDS: *Golden ratio. Probability. Functions.*

RESÚMEN
La proporción áurea es una de las constantes más conocidas y más investigadas en Matemáticas debido a sus propiedades geométricas y algebraicas. Su uso se remonta a la antigüedad, para la construcción de pentágonos regulares y algunos sólidos platónicos. El presente trabajo propone la construcción de dos funciones de densidad de probabilidad que dependen de la proporción áurea y el cálculo de sus características, como función de distribución acumulativa, valor esperado y varianza. La importancia de esta construcción se debe a su aspecto pedagógico, mediante el uso de conceptos de funciones, cálculo y teoría de probabilidades.

PALABRAS CLAVE: *Proporción áurea. Probabilidad. Funciones.*

INTRODUÇÃO

A razão áurea ou número ϕ (letra grega *phi*) pode ser considerada uma das constantes mais instigantes da Matemática devido às suas interessantes propriedades geométricas e algébricas. Seu conhecimento e utilização remonta aos gregos antigos, que relacionaram a constante à construção de pentágonos regulares e sólidos platônicos, como o dodecaedro e o icosaedro.

[1] Universidade Estadual de Campinas

Sua definição geométrica, dada como “razão extrema e média”, aparece no clássico livro VI de Elementos, de Euclides e suas aplicações aparecem em outras partes da obra. O termo “razão áurea” atribuído à constante tornou-se popular apenas no século XIX e sua denotação pela letra grega ϕ é atribuída ao matemático americano Mark Barr já no século XX, em menção à primeira letra grega do nome de Fídias, escultor grego da Antiguidade cujas realizações vão de Partenon de Atenas ao Zeus no templo de Olímpia, que de acordo com alguns historiadores, fazia uso da constante em suas esculturas.

Além de importantes e curiosas propriedades geométricas e algébricas, a razão áurea também se tornou popular pelas suas aparições estéticas e místicas. Há historiadores que sustentam sua influência desde a construção da Grande Pirâmide de Gizé, no Egito até na obra Mona Lisa, de Leonardo da Vinci. Padrões em espirais de Fibonacci encontradas na natureza, como na cabeça de um girassol e em pontas de cascas de pinhas também são relacionadas à ϕ. Tais propriedades, embora questionáveis, fazem com que a razão áurea seja alvo de diversos estudos e textos. Interessantes leituras sobre a razão áurea e sua história podem ser encontradas em LÍVIO (2015) e STEWART (2016).

O presente artigo tem por objetivo envolver a razão áurea em probabilidade, por meio da construção de funções densidades de probabilidade simétrica e assimétrica que são dadas em termos de ϕ. Consequentemente, verifica-se que características de variáveis aleatórias que seguem tais distribuições, como seus valores esperados e variâncias também dependem da razão áurea. Importante mencionar que tal associação é feita por construção (intencionalmente) e sua importância se dá em caráter pedagógico, por meio do envolvimento de uma constante bastante conhecida e teoria de probabilidade.

1. RAZÃO ÁUREA E ALGUMAS PROPRIEDADES

A razão áurea foi definida primeiramente em termos geométricos. No livro VI de Elementos, Euclides (c. 300 a.C) enuncia:

“*Diz-se que uma linha reta é cortada na razão extrema e média quando, assim como a linha toda está para o maior segmento, o maior segmento está para o menor*”.

Considere o segmento de reta AB da Figura 1.

Figura 1: Segmento de reta ilustrativo para obtenção da razão áurea.

Este segmento será cortado na razão extrema e média (razão áurea) no ponto C se

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB} = \phi \qquad (1)$$

e o valor da proporção em (1) é a razão áurea ϕ. Se considerarmos $\overline{AC} = x$ e $\overline{CB} = 1$, observe pela igualdade (1) que $x = \phi$ e que

$$\frac{x+1}{x} = \frac{x}{1} \Rightarrow x + 1 = x^2. \quad (2)$$

Assim, a razão áurea pode ser vista como um dos pontos de interseção da função linear $y = x + 1$ com a função quadrática $y = x^2$, como apresentado na Figura 2.

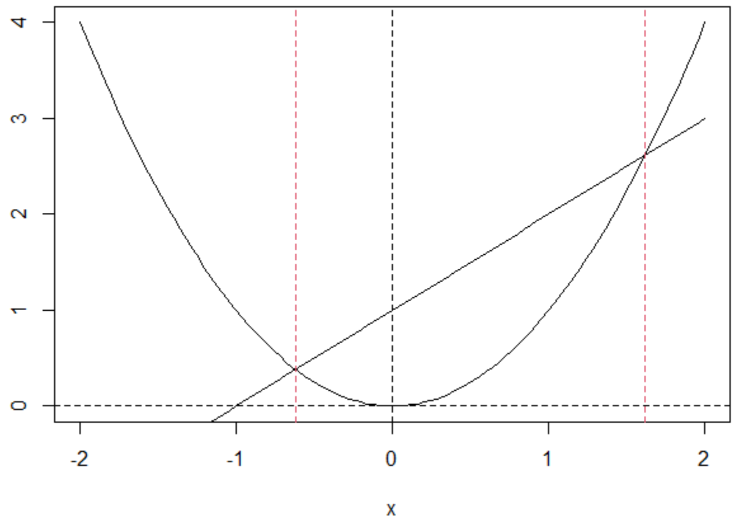

Figura 2: Gráficos das funções $y = x + 1$ (reta) e $y = x^2$ (parábola). A interseção positiva ocorre em $x = \phi$.

Para obtenção das interseções e, consequentemente, do valor da razão áurea, basta resolvermos a equação quadrática

$$x^2 - x - 1 = 0 \qquad (3)$$

que nos fornece as soluções $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} > 0$ e $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$. Como a razão áurea é positiva, temos então que

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}6180339887\ldots$$

Note assim que $\phi \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, isto é, trata-se de um número irracional.

Diversas propriedades geométricas e algébricas são verificadas envolvendo a razão áurea, tais como (Livio, 2015):

1. $\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 \ldots}}}}$

2. $\phi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}$
3. A razão entra a diagonal e o lado de um pentágono regular é igual a ϕ.
4. Um dodecaedro com aresta unitária tem área total de superfície igual a $15\phi\sqrt{3-\phi}$ e volume igual a $5\phi^3/(6-2\phi)$.
5. $\phi^2 = 2{,}6180339887 \ldots$ e $\frac{1}{\phi} = 0{,}6180339887 \ldots$
6. Podemos escrever a sequência de Fibonacci $\{F_n\}$ em termos de ϕ como

$$F_n = \frac{\phi^n - (-\phi)^{-n}}{\sqrt{5}}, n = 1,2,3 \ldots$$

Diante de tantas propriedades interessantes e até mesmo curiosas sobre a razão áurea, vamos envolvê-la na área de probabilidade, por meio da especificação conveniente de duas funções densidades de probabilidade a partir da definição da razão áurea da Figura 2. Para mais detalhes técnicos sobre a construção geométrica da razão áurea, ver Rezende e Queiroz (2008).

2. DUAS DISTRIBUIÇÕES DE PROBABILIDADE

Nesta seção, vamos construir duas distribuições de probabilidade para variáveis aleatórias contínuas que serão definidas em termos de ϕ. A primeira distribuição é assimétrica e a segunda é simétrica em torno da constante. Para tanto, utilizaremos as seguintes condições para que uma função $f(x)$ seja uma função densidade de probabilidade de uma variável aleatória contínua:

i) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$;

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Além disso, vamos obter a partir da função densidade de probabilidade, a função de distribuição acumulada, o valor esperado e a variância da variável aleatória sob a distribuição em questão. Para os conceitos técnicos aqui utilizados sobre teoria de probabilidade, o leitor é direcionado a Meyer (2017) e Bussab e Morettin (2017).

2.1 DISTRIBUIÇÃO ASSIMÉTRICA

Considere uma variável aleatória contínua X que assuma valores no intervalo $(0, \phi)$. Vamos construir uma função densidade de probabilidade (fdp) de X, denotada aqui por $f(x)$, a partir da função quadrática da Figura 2 compreendida entre 0 e ϕ, que é o ponto de interseção de $y = x + 1$ com $y = x^2$ no primeiro quadrante. Inicialmente, para obtermos a fdp no intervalo $(0, \phi)$, precisamos determinar o valor da constante C tal que

$$\int_0^{\phi} Cx^2 dx = 1,$$

isto é, a área sob $f(x)$ no suporte $(0, \phi)$ deve ser igual a 1 para que seja uma fdp. De fato,

$$\int_0^{\phi} Cx^2dx = C\int_0^{\phi} x^2dx = C\frac{x^3}{3} = C\frac{\phi^3}{3} = 1 \Leftrightarrow C = \frac{3}{\phi^3}.$$

Logo, a fdp é dada por

$$f(x) = \frac{3}{\phi^3}x^2\mathbb{I}_{(0,\phi)}(x), \qquad (4)$$

em que $\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases}1, x \in A\\ 0, x \notin A\end{cases}$ é a função indicadora usual em um conjunto A. Note além disso que $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$, outra condição necessária para que $f(x)$ seja uma fdp. O gráfico da $f(x)$ é apresentado na Figura 3. Temos assim uma distribuição assimétrica à direita para X, com intervalos de valores próximos de ϕ mais prováveis de ocorrer do que valores próximos ao extremo esquerdo do suporte, a saber, zero.

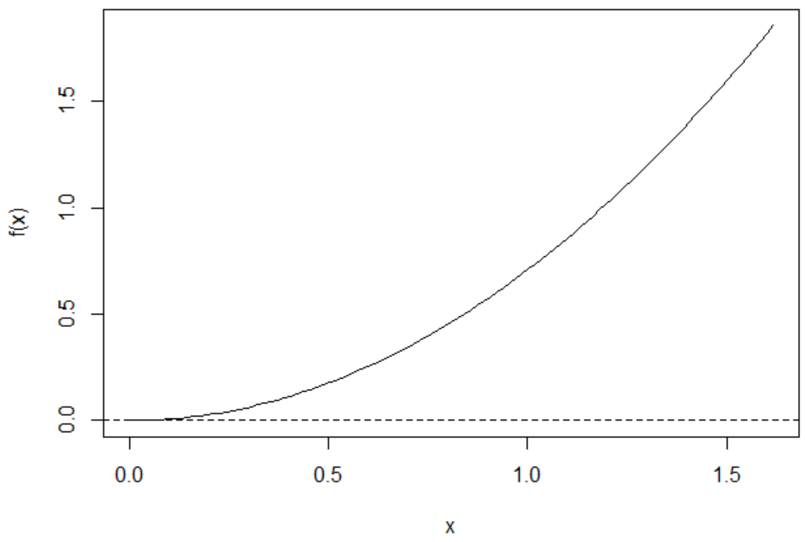

Figura 3: Gráfico da fdp assimétrica obtida em termos de ϕ.

A partir da fdp definida em (4), podemos calcular probabilidades envolvendo a variável aleatória X, uma vez que, para qualquer conjunto mensurável de números reais B,

$$P(X \in B) = \int_B f(x)dx.$$

Em particular, podemos obter a função de distribuição acumulada (fda) denotada por $F(x)$ de X, que é dada por

$$F(x) = P(X \leq x), x \in \mathbb{R}.$$

Logo, no nosso caso, utilizando a fdp (4), temos que

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{3}{\phi^3}t^2dt = \frac{3}{\phi^3}\frac{t^3}{3} = \left(\frac{x}{\phi}\right)^3,$$

de modo que

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \left(\dfrac{x}{\phi}\right)^3, & 0 < x < \phi. \\ 1, & x \geq \phi. \end{cases} \quad (5)$$

O gráfico da fda (5) é apresentada na Figura 4. A Tabela 1 mostra também os valores de $F(x)$ para alguns valores de x. Por exemplo, se X possui a fdp (4), então a probabilidade de que assuma valor menor ou igual a 0,5 é de aproximadamente 0,0295 ou 2,95%.

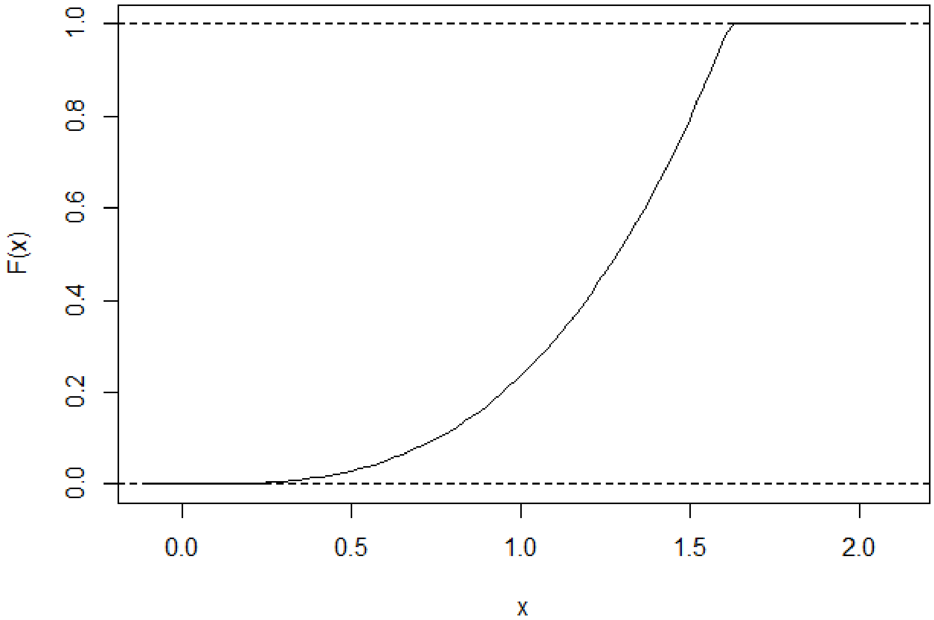

Figura 4: Gráfico da fda (5).

x	$F(x) = P(X \leq x)$
0	0
0,5	0,0295
1	0,2361
1,5	0,7967
2	1

Tabela 1: Valores da fda (5) para alguns valores de x.

O valor esperado (média) e a variância são importantes características de uma variável aleatória, uma vez que fornecem medidas de tendência central e dispersão da variável. Além disso, podemos calcular tais medidas a partir da fdp de uma variável contínua.

O valor esperado de X, denotado por $E(X)$, também conhecido como média de X, é obtido por

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx,$$

Assim, temos que

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \int_{0}^{\phi} x \frac{3}{\phi^3} x^2 dx = \frac{3}{\phi^3}\frac{x^4}{4} = \frac{3\phi}{4},$$

logo

$$E(X) = \frac{3\phi}{4} = \frac{3(1+\sqrt{5})}{8} \cong 1{,}2135.$$

Para o cálculo da variância de X, denotada por $Var(X)$, que mede o grau de dispersão da variável em relação à sua média, obtemos inicialmente o segundo momento da variável, isto é

$$E(X^2) = \int_{0}^{\phi} x^2 f(x)dx = \int_{0}^{\phi} x^2 \frac{3}{\phi^3} x^2 dx = \frac{3}{\phi^3}\frac{x^5}{5} = \frac{3\phi^2}{5},$$

e como

$$Var(X) = E(X^2) - E^2(X),$$

segue que

$$Var(X) = \frac{3\phi^2}{5} - \left(\frac{3\phi}{4}\right)^2 = \frac{3\phi^2}{80},$$

portanto,

$$Var(X) = \frac{3\phi^2}{80} = \frac{3(1+\sqrt{5})^2}{320} \cong 0{,}0982.$$

A partir da variância, podemos obter o desvio padrão de X, denotado aqui por $DP(x)$, uma vez que $DP(X) = \sqrt{Var(X)}$. No nosso caso,

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{3\phi^2}{80}} = \frac{\phi\sqrt{15}}{20} \cong 0{,}3133.$$

A Tabela 2 apresenta a função densidade de probabilidade (4) e suas propriedades obtidas.

Função densidade de probabilidade	$f(x) = \frac{3}{\phi^3} x^2 \mathbb{I}_{(0,\phi)}(x)$
Função de distribuição acumulada	$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \left(\frac{x}{\phi}\right)^3, & 0 < x < \phi \\ 1, & x \geq \phi. \end{cases}$
Valor esperado	$\frac{3\phi}{4}$
Variância	$\frac{3\phi^2}{80}$
Desvio padrão	$\frac{\phi\sqrt{15}}{20}$

Tabela 2: Função densidade de probabilidade (4) e suas propriedades.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

2.2 DISTRIBUIÇÃO SIMÉTRICA

Suponha agora uma variável aleatória X que assuma valores no intervalo $(0,2\phi)$. Podemos obter uma distribuição simétrica em torno de ϕ para X ao fazer a translação do gráfico de $y = x^2$ em que $x \leq 0$ em 2ϕ unidades à direita, obtendo um gráfico da forma apresentada na Figura 5. Exceto pela constante de normalização, a fdp será igual a x^2 para $x \in (0,\phi)$ e igual a $(x-2\phi)^2$ se $x \in (\phi, 2\phi)$. Neste caso, a constante de normalização é a metade da constante do caso simétrico, isto é, $C = \frac{3}{2\phi^3}$. Assim, a fdp simétrica em torno de ϕ é dada por

$$f(x) = \frac{3}{2\phi^3}\left[x^2\mathbb{I}_{(0,\phi)}(x) + (x-2\phi)^2\mathbb{I}_{[\phi,2\phi)}(x)\right], \qquad (6)$$

e seu gráfico está na Figura 5.

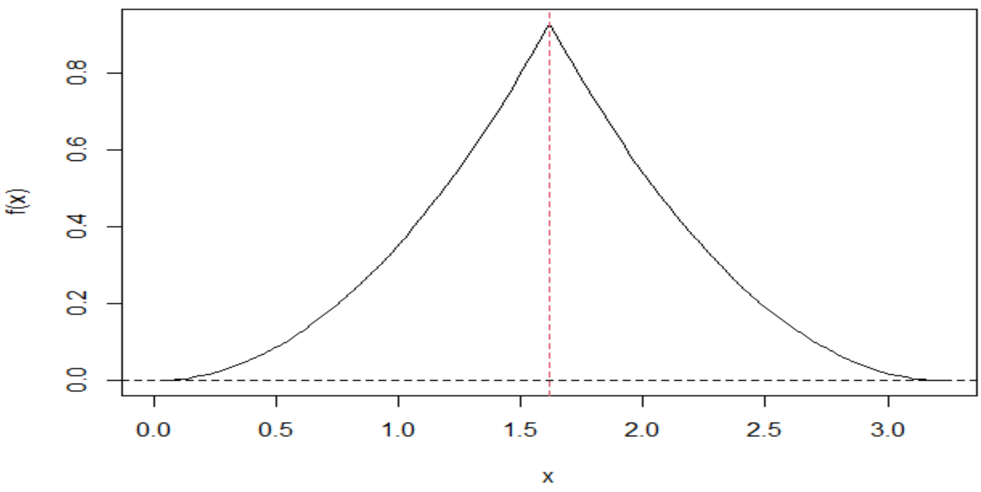

Figura 5: Gráfico da fdp simétrica (6).

A fda pode ser calculada por partes, isto é, para $0 < x < \phi$, temos que

$$F(x) = \int_0^x \frac{3}{2\phi^3}t^2dt = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\phi}\right)^3,$$

já para $\phi \leq x < 2\phi$ temos que

$$F(x) = \int_0^\phi \frac{3}{2\phi^3}t^2dt + \int_\phi^x (t-2\phi)^2dt =$$

$$= \frac{1}{2} + \int_{2\phi-x}^{\phi} \frac{3}{2\phi^3}t^2dt = \frac{1}{2} + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{2\phi-x}{\phi}\right)^3\right] = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\phi-x}{\phi}\right)^3,$$

assim,

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

$$F(x)=\begin{cases} 0, x\leq 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\phi}\right)^3, 0<x<\phi \\ 1-\frac{1}{2}\left(\frac{2\phi-x}{\phi}\right)^3, \phi\leq x<2\phi \\ 1, x\geq 2\phi. \end{cases} \quad (7)$$

O gráfico da fda (7) está apresentada na Figura 6 e uma tabela com valores de $F(x)$ para alguns valores de x estão na Tabela 3.

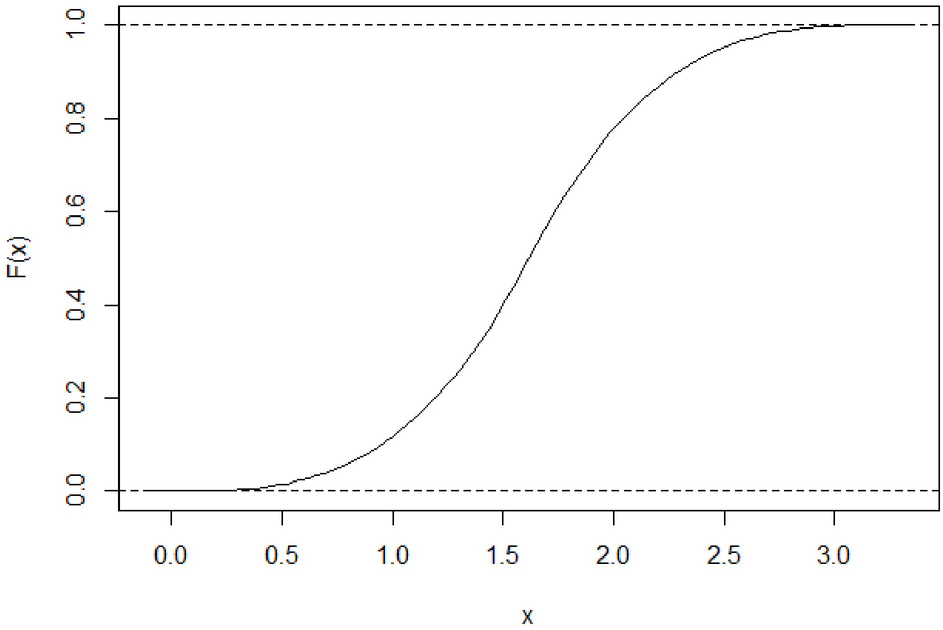

Figura 6: Gráfico da fda (7).

x	$F(x)=P(X\leq x)$
0	0
0,5	0,0148
1	0,1180
1,5	0,3984
ϕ	0,5
2	0,7771
2,5	0,9529
3	1

Tabela 3: Valores da fda (7) para alguns valores de x.

O valor esperado de X é dado por

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\frac{3}{2\phi^3}\left[\int_0^{\phi} x^3dx+\int_{\phi}^{2\phi} x(x-2\phi)^2dx\right]=\phi.$$

Além disso, é fácil observar que

$$E(X^2) = \frac{3}{2\phi^3}\left[\int_0^{\phi} x^4 dx + \int_{\phi}^{2\phi} x^2(x-2\phi)^2 dx\right] = \frac{11\phi^2}{10},$$

de modo que

$$Var(X) = \frac{11\phi^2}{10} - \phi^2 = \frac{\phi^2}{10} = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^2}{20} \cong 0{,}5236.$$

Por fim, temos que

$$DP(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{\phi^2}{10}} = \frac{\phi\sqrt{10}}{10} \cong 0{,}5117.$$

A Tabela 4 mostra a função densidade de probabilidade (6) e suas características calculadas.

Função densidade de probabilidade	$f(x) = \frac{3}{2\phi^3}\left[x^2\mathbb{I}_{(0,\phi)}(x) + (x-2\phi)^2\mathbb{I}_{[\phi,2\phi)}(x)\right]$
Função de distribuição acumulada	$F(x) = \begin{cases} 0, x \leq 0 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\phi}\right)^3, 0 < x < \phi \\ 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\phi - x}{\phi}\right)^3, \phi \leq x < 2\phi \\ 1, x \geq 2\phi. \end{cases}$
Valor esperado	ϕ
Variância	$\frac{\phi^2}{10}$
Desvio padrão	$\frac{\phi\sqrt{10}}{10}$

Tabela 4: Função densidade de probabilidade (6) e suas propriedades.

3. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apresentamos neste trabalho duas distribuições de probabilidade definidas em termos da razão áurea e calculamos propriedades de tais distribuições, como a função de distribuição acumulada, o valor esperado e a variância da variável aleatória contínua sob tais modelos. A importância destas construções está no seu caráter pedagógico: conceitos de teoria de probabilidade, funções e geometria foram utilizados, além do envolvimento de ϕ, que devido às suas diversas propriedades, desperta interesse e curiosidade de matemáticos e do público em geral até os dias de hoje.

Evidentemente que o presente trabalho pode ser estendido naturalmente. Outras propriedades das distribuições de probabilidade obtidas podem ser calculadas, tais como suas funções geradoras de momentos e funções características por exemplo. Além disso, funções além da quadrática são facilmente adaptáveis de modo a envolverem a razão áurea e serem interessantes sob o ponto de vista probabilístico, como as funções exponenciais.

REFERÊNCIAS

1. BUSSAB, W.O. e MORETTIN, P.A. **Estatística Básica**. 9ª edição. São Paulo, Saraiva, 2017.
2. LIVIO, M. **Razão áurea: a história de Fi, um número surpreendente**. 7ª edição. Rio de Janeiro, Record, 2015.
3. MEYER, P. **Probabilidade: aplicações à Estatística**. Rio de Janeiro, LTC, 2017.
4. REZENDE, E.Q.F. e QUEIROZ, M.L.B. **Geometria euclidiana plana e construções geométricas.** 2ª edição. Campinas, Editora Unicamp, 2008.
5. STEWART, I. **O fantástico mundo dos números: a matemática do zero ao infinito**. 1ª edição. Rio de Janeiro, Zahar, 2016.