RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

UTILIZAÇÃO DAS FUNÇÕES DE GREEN NA MATEMÁTICA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS DE VALORES DE CONTORNO NÃO HOMOGÊNEOS: CONDUÇÃO DE CALOR

USE OF GREEN FUNCTIONS IN MATHEMATICS IN SOLVING PROBLEMS OF INHOMOGENEOUS BOUNDARY VALUES: HEAT CONDUCTION

USO DE FUNCIONES VERDES EN MATEMÁTICAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE VALORES LÍMITE NO HOMOGÉNEOS: CONDUCCIÓN DE CALOR

Yves Garnard Irilan[1]

e432947
https://doi.org/10.47820/recima21.v4i3.2947

PUBLICADO: 03/2023

RESUMO
Uma função de Green é uma função matemática utilizada para resolver equações diferenciais não homogêneas sujeitas a condições iniciais ou condições de contorno determinadas. Esta função tem aplicações em várias áreas da física teórica tais como mecânica, eletromagnetismo, acústica e teoria de partículas elementares. Neste trabalho, com objetivo de mostrar a eficiência deste método, é realizado um exemplo de aplicação prática na área de ciências térmicas, a partir de uma particularização do método geral deduzido.

PALAVRAS-CHAVE: Equações diferenciais. Função e Green. Condução de calor.

ABSTRACT
A Green function is a mathematical function used to solve inhomogeneous differential equations subject to initial conditions or given boundary conditions. This function has applications in various areas of theoretical physics such as mechanics, electromagnetism, acoustics and elementary particle theory. In this work, in order to show the efficiency of this method, an example of practical application in the area of thermal sciences is carried out, from a particularization of the general method deduced.

KEYWORDS: *Differential equations. Function and Green. Heat conduction.*

RESUMEN
Una función verde es una función matemática utilizada para resolver ecuaciones diferenciales no homogéneas sujetas a condiciones iniciales o condiciones de contorno dadas. Esta función tiene aplicaciones en diversas áreas de la física teórica como la mecánica, el electromagnetismo, la acústica y la teoría de partículas elementales. En este trabajo, con el fin de mostrar la eficacia de este método, se lleva a cabo un ejemplo de aplicación práctica en el área de las ciencias termales, a partir de una particularización del método general deducido.

PALABRAS CLAVE: *Ecuaciones diferenciales. Función y verde. Conducción de calor.*

INTRODUÇÃO

As funções de Green são utilizadas para solucionar equações diferenciais parciais não homogêneas. O método de resolução envolve obter a solução do problema em termos de uma função de Green. Em seguida, deve-se tratar o problema como se fosse homogêneo, onde a função de Green é a solução do problema homogêneo. Uma vez resolvida a versão homogênea, basta substituir a solução na solução do problema inicial.

[1] Universidade Federal de Santa Catarina - IFSC.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Este método é muito empregado na área de ciências térmicas em problemas de condução de calor em regime transiente com geração interna de calor. Neste trabalho será apresentado o procedimento para resolver problemas de condução de calor usando o método de funções de Green.

A fim de demonstrar a eficiência do método, um exemplo de aplicação prática na área de ciências térmicas será resolvido a partir de uma particularização do método geral deduzido. Para resolver o exemplo será utilizado o *software* Maple com a finalidade de facilitar a resolução, mostrar os resultados de uma forma mais objetiva através de gráficos, mas principalmente com o intuito de aprimorar os conhecimentos do aluno sobre este *software* tão eficaz.

O USO DA FUNÇÃO DE GREEN EM PROBLEMAS DE CONDUÇÃO DE CALOR

Para demonstrar a aplicação do método de Funções de Green na área de Ciências Térmicas será considerado o problema tri-dimensional de condução de calor transiente em um corpo submetido a uma geração interna de calor. Este problema é expresso da seguinte forma:

$$\nabla^2 T(r,t)+\frac{1}{k}g(r,t)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T(r,t)}{\partial t}$$ na região *R, t > 0* (1)

$$k\frac{\partial T}{\partial n_i}+h_i T=h_i T_{\infty i}=f_i(r,t)$$,em S_i, *t > 0* (2)

$$T(r,0)=F(r) \quad (3)$$

Pretende-se resolver a equação diferencial parcial, Eq. (1), para encontrar a distribuição de temperatura transiente do sólido em questão. A posição espacial dentro do corpo é indicada pelo vetor ***r*** que pode ser escrito em qualquer sistema de coordenadas ortogonais. O termo *g(**r**,t)* representa a geração de calor volumétrica, dependente do tempo e da posição. A condutividade térmica *k* e a difusividade térmica *α* são propriedades constantes do sólido.

A Eq. (2) representa as condições de contorno, onde a derivada espacial $\partial/\partial n_i$ indica à diferenciação ao longo de uma normal apontando para fora da superfície S_i, sendo i = 1, 2,...N e N o número de superfícies.

A condição inicial de distribuição de temperatura está representada pela Eq.(3).

MÉTODO DA FUNÇÃO DE GREEN

Para solucionar este problema não homogêneo de condução de calor, deve-se considerar um problema auxiliar aplicado na mesma região R, cuja solução é $G(r,t|r',\tau)$.

Problema auxiliar:

$$\nabla^2 G(r,t|r',\tau)+\frac{1}{k}\delta(r-r')\delta(t-\tau)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial G}{\partial t}$$ na região *R, t* > *τ* (4)

$$k\frac{\partial G}{\partial n_i}+h_i G=0$$ em S_i, *t* > *τ* (5)

Fisicamente, a Função de Green "G" pode ser interpretada como a temperatura na posição ***r***, no tempo t, devido a um impulso de energia gerado na posição ***r´***, liberando energia em um determinado tempo *τ*. De acordo com essa interpretação, a função de Green pode ser definida como:

$$G(r,t|r',\tau)\equiv G(efeito|impulso)$$

Onde o segundo argumento, "***r´***,*τ*", representa o impulso, ou seja, a geração impulsiva de calor na posição ***r´*** e no instante de tempo *τ*. O primeiro argumento refere-se ao "efeito", ou seja, a temperatura resultante desse impulso em uma posição ***r*** e um tempo *t*.

Observando o problema auxiliar, nota-se que na Eq. (4) foi introduzida a função Delta de Dirac para substituir o termo fonte de geração de energia. Além disso, as condições de contorno para a função de Green são homogêneas.

A função *δ(**r** - **r´**)* representa a fonte de calor na posição ***r´***, que pode ser pontual, de linha ou de superfície. A função *δ(t - τ´)* indica que fonte de calor instantânea está liberando sua energia no tempo *t* = *τ.*

A função de Green que satisfaz o problema auxiliar obedece à seguinte relação de reciprocidade:

$$G(r,t|r',\tau)=G(r',-\tau|r,-t) \quad (7)$$

Substituindo essa relação na Eq. (4),

$$\nabla_0^2 G+\frac{1}{\alpha}\delta(r-r')\delta(t-\tau)=-\frac{1}{\alpha}\frac{\partial G}{\partial \tau}$$

Onde é o Laplaciano para as coordenadas ***r´*** e o sinal negativo do lado direito da equação deve-se à substituição de *t* por – *τ*.

Retornando à Eq. (1) do problema inicial, podemos escrevê-la em termos de ***r´*** e *τ* como,

$$\nabla_0^2 T+\frac{1}{k}g(r',\tau)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (9)$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Ainda, multiplicando Eq. (8) por *T*, multiplicando Eq. (9) por *G*, e subtraindo (8) de (9) tem-se,

$$\left(G\nabla_0^2 T - T\nabla_0^2 G\right) + \frac{1}{k} g(r',\tau) G - \frac{1}{\alpha}\delta(r'-r)\delta(\tau-t)T = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial(GT)}{\partial\tau} \quad (10)$$

Agora integramos Eq. (10) em ***r´*** sobre a região R, e integramos também *τ* de 0 a *t** + *ε*, onde *ε* é um número arbitrário e pequeno. Então,

$$\int_{\tau=0}^{t*+\varepsilon}\int_R \alpha\left(G\nabla_0^2 T - T\nabla_0^2 G\right) dv'\,d\tau + \int_{\tau=0}^{t*+\varepsilon}\int_R \frac{\alpha}{k} G g(r',\tau)\, dv'\,d\tau - T ¿¿ \quad (11)$$

As integrais envolvendo funções Delta de Dirac são simplificadas devido à propriedade:

$$\int_{\tau=0}^{t} \delta(\tau-t).d\tau \int_R \delta(r'-r).T(r',\tau).dr' = T(r,t)$$

Isolando o termo *T(**r**,t)* (que é exatamente o que estamos procurando),

$$T(r,t) = -\int_R [GT]_{\tau=0}^{t+\varepsilon} dv' + \int_{\tau=0}^{t+\varepsilon}\int_R \frac{\alpha}{k} G g(r',\tau)\, dv'\,d\tau + \int_{\tau=0}^{t+\varepsilon}\int_R \alpha\left(G\nabla_0^2 T - T\nabla_0^2 G\right) dv'\,d\tau \quad (12)$$

Ainda é possível manipular esta expressão, reescrevendo cada termo de uma forma mais simplificada. O primeiro termo pode ser substituído por:

$$\int_R G(r,t|r',0) F(r')\, dv' \quad (13)$$

Pois *T(**r**´,0)= F(**r**)* e $G(r,0|r',t*)=0$ para $t*¿t$ (não existe resposta antes de um impulso ser emitido). Aplicando o teorema de Green para o terceiro termo é possível transformar a integral de volume em integral de área,

$$\int_{\tau=0}^{t+\varepsilon}\int_R \alpha\left(G\nabla_0^2 T - T\nabla_0^2 G\right) dv'\,d\tau = \int_{\tau=0}^{t+\varepsilon}\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i} \alpha\left(G\frac{\partial T}{\partial n_i}\Big|_{r'=r_i} - T\frac{\partial G}{\partial n_i}\Big|_{r'=r_i}\right) ds_i'\,d\tau \quad (14)$$

Multiplicando a condição de contorno (2) por G, a condição (5) por T e subtraindo, se obtém:

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

$$\left(G\frac{\partial T}{\partial n_i'}\Big|_{r'=r_i}-T\frac{\partial G}{\partial n_i'}\Big|_{r'=r_i}\right)=\frac{f_i(r_i',\tau)}{k_i}G \quad (15)$$

Assim, se encontra a solução T(**r**,t) para o problema tri-dimensional de condução de calor, em termos da função de Green:

$$T(r,t)=\int_R G(r,t|r',0)F(r')dv+\int_{\tau=0}^{t}\int_R \frac{\alpha}{k}G(r,t|r',\tau)g(r',\tau)dv'd\tau+ \quad (15)$$

$$+\alpha\int_{\tau=0}^{t}\sum_{i=1}^{N}\int_{S_i}\frac{f_i(r_i',\tau)}{k_i}G(r,t|r',\tau)ds_i'd\tau$$

A solução acima é composta por três termos que possuem significados físicos distintos. O primeiro termo computa os efeitos da distribuição inicial de temperatura. O segundo termo carrega a influência da geração interna de calor, e o terceiro termo está computando os efeitos das condições de contorno não-homogêneas.

Agora fica fácil obter as soluções para os casos uni e bidimensionais a partir da Eq. (18).

Problema bidimensional:

$$T(r,t)=\int_A G(r,t|r',0)F(r')dA'+\frac{\alpha}{k}\int_{\tau=0}^{t}\int_A G(r,t|r',\tau)g(r',\tau)dA'd\tau+$$
$$+\alpha\int_{\tau=0}^{t}\sum_{i=1}^{N}\int_{C}\frac{f_i(r_i',\tau)}{k_i}G(r,t|r',\tau)dl_i'd\tau \quad (16)$$

Problema unidimensional:

$$T(x,t)=\int_L x'^P G(x,t|x',0)F(x')dx'+\frac{\alpha}{k}\int_{\tau=0}^{t}\int_L x'^P G(x,t|x',\tau)g(x',\tau)dx'd\tau+$$
$$+\alpha\int_{\tau=0}^{t}\sum_{i=1}^{2}\frac{f_i(r_i',\tau)}{k_i}G(x,t|x',\tau)d\tau \quad (17)$$

Onde x'^P é a função peso de Sturm-Liouville com valor igual a 0, 1 ou 2, para uma placa, um cilindro ou uma esfera, respectivamente.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

DETERMINAÇÃO DA FUNÇAO DE GREEN

Na seção anterior foi obtida a distribuição de temperatura T(x,y,z,t) em termos da função de Green. Então, agora basta determinar a função de Green para encontrar a solução do problema!

A fim de determinar G, deve-se considerar o problema como se ele fosse homogêneo, ou seja, desconsiderando a geração interna de calor e adotando condições de contorno nulas. Assim,

$$\nabla^2 \Psi(r,t) = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial \Psi(r,t)}{\partial t} \quad (18)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n_i} + H_i \Psi = 0 \quad (19)$$

$$\Psi(r,0) = F(r) \quad (20)$$

Através do método de separação de variáveis pode-se obter a solução geral para este problema.

Além disso, sabe-se também que a solução geral, de acordo com a Eq. (18), pode ser expressa em termos da função de Green por:

$$T(r,t) = \int_R G(r,t|r',0) F(r') dv' \quad (21)$$

Assim, a Eq. (28) pode ser comparada com a solução geral obtida através do método de separação de variáveis para o problema homogêneo da Eq. (25). Desta comparação, determina-se a função de Green em $\tau = 0$. Para obter a função de Green para valores de $\tau > 0$ basta substituir *t* por (*t* - τ) na expressão resultante.

APLICAÇÃO PRÁTICA

A fim de demonstrar o poder deste método de solução de equações diferenciais, será apresentado um problema de aplicação prática na área de ciências térmicas, onde o método da função de Green será utilizado para obter a solução.

O problema consiste em determinar a distribuição de temperatura em um chip que contém um componente eletrônico dissipando energia a uma taxa constante. Neste caso, o problema pode ser modelado como uma placa de dimensões 0 < x < a, 0 < y < b, sujeita a uma geração interna de calor pontual (em x=x' e y=y'). Portanto, trata-se de um problema bi-dimensional de condução de calor em regime transiente, com geração interna de calor:

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{1}{k}g(x,y,t)=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial t}$$

As condições de contorno são do primeiro tipo, temperaturas prescritas:

$$T(0,y,t)=f_1(t)\ ,\ T(x,0,t)=f_3(t)$$

$$T(a,y,t)=f_2(t)\ ,\ T(x,b,t)=f_4(t)$$

E a condição inicial é:

$$T(x,y,0)=F(x,y)$$

Conforme mostrado anteriormente, deve-se primeiramente resolver a versão homogênea do problema:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial \psi(x,y,t)}{\partial t}$$

$$\Psi(0,y,t)=\Psi(a,y,t)=0$$

$$\Psi(x,0,t)=\Psi(x,b,t)=0$$

$$\psi(x,y,0)=F(x,y)$$

Por separação de variáveis, a solução geral é:

$$\psi(x,y,t)=\int_0^a\int_0^b\left[\frac{4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha(\gamma_n^2+v_m^2)(t-\tau)}\sin(\gamma_n x)\sin(v_m x)\sin(\gamma_n x')\sin(v_m y')\right]F(x',y')\,dx'dy'$$

Onde

$$\gamma_n=\frac{n\pi}{a}\quad v_m=\frac{m\pi}{b}$$

Mas a mesma solução também pode ser dada pela Eq. (18) em termos da função de Green por:

$$\psi(x,y,t)=\int_0^a\int_0^b G(x,y,t|x',y',0)\,F(x',y')\,dx'dy'$$

Comparando as duas soluções obtemos a função de Green em τ = 0:

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

$$G(x,y,t|x',y',0)=\frac{4}{a.b}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha(\gamma_n^2+v_m^2)(t)}\sin(\gamma_n x)\sin(v_m x)\sin(\gamma_n x')\sin(v_m y')$$

Substituindo *t* por (*t* - *τ*) obtém-se a função de Green para o problema:

$$G(x,y,t|x',y',\tau)=\frac{4}{a.b}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha(\gamma_n^2+v_m^2)(t-\tau)}\sin(\gamma_n x)\sin(v_m x)\sin(\gamma_n x')\sin(v_m y')$$

Assim, finalmente se obtém a solução final para a distribuição de temperatura na placa:

$$T(x,y,t)=\frac{4}{a.b}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\alpha(\gamma_n^2+v_m^2)(t)}\sin(\gamma_n x)\sin(v_m x)\int_0^a\int_0^b\sin(\gamma_n x')\sin(v_m y')F(x',y)dx'dy'+$$

$$+\frac{\alpha}{k}\frac{4}{a.b}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\gamma_n x)\sin(v_m y)\int_0^t e^{-\alpha(\gamma_n^2+v_m^2)(t-\tau)}d\tau\int_0^a\int_0^b\sin(\gamma_n x')\sin(v_m y')g(x',y',\tau)dx'dy'+$$

$$+\alpha\frac{4}{a.b}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^t e^{-\alpha(\gamma_n^2+v_m^2)(t-\tau)}d\tau\sum_{i=1}^{N}\int_C\sin(\gamma_n x)\sin(v_m x)\sin(\gamma_n x'i)\sin(v_m y'i)f_i(xi',yi'\tau)\frac{1}{ki}dli$$

Em seguida, os dados do problema serão inseridos na expressão acima e o problema estará resolvido!

DADOS DO PROBLEMA

O chip consiste em uma placa de silício de acordo com a figura 1, com dimensões a=10 e b=10, onde um componente eletrônico pontual (fonte da dissipação de calor) está fixado no substrato de silício na posição x’=a/3 e y’=b/3, dissipando 50 W. O silício possui condutividade térmica k=150 (W/m.K) e difusividade térmica α=9,19 E-5(m2/s).

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

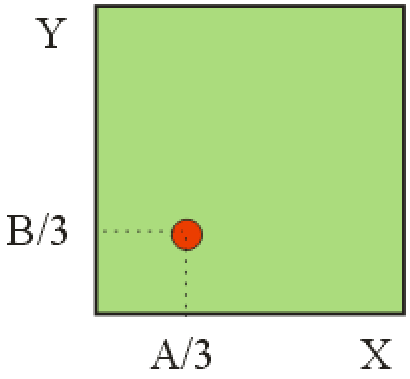

Figura 1: Aplicação do método, placa de silício.

Este problema foi análise nas seguintes condições:

Temperaturas prescritas:

$$T(0,y,t)=T(a,y,t)=0$$

$$T(x,0,t)=T(x,b,t)=0$$

Condição inicial:

$$T(x,y,0)=0$$

Geração interna de Calor:

$$g(x,y,t)=g_0.\delta\left(x-\frac{a}{3}\right)\delta\left(y-\frac{b}{3}\right)$$

$$g_0=50\,W$$

A partir dessas condições, a expressão para a distribuição de temperatura no chip se reduz a:

$$T(x,y,t)=\frac{\alpha}{k}\frac{4}{a.b}g_0\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\gamma_n x)\sin(v_m y)\sin\left(\gamma_n\frac{a}{3}\right)\sin\left(v_m\frac{b}{3}\right)\int_0^t e^{-\alpha(\gamma_n^2+v_m^2)(t-\tau)}d\tau$$

Alguns gráficos foram feitos para avaliar o problema e ilustrar com mais clareza os resultados obtidos.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Inicialmente obteve-se a distribuição de temperatura ao longo de duas linhas na direção x, sendo uma delas passando exatamente sobre a fonte de calor, em y=b/3, e a segunda linha passando no meio da placa, em y=b/2. Esta análise tem o objetivo de avaliar a influência da proximidade da fonte de calor na temperatura da placa como pode ser visto na figura 2.

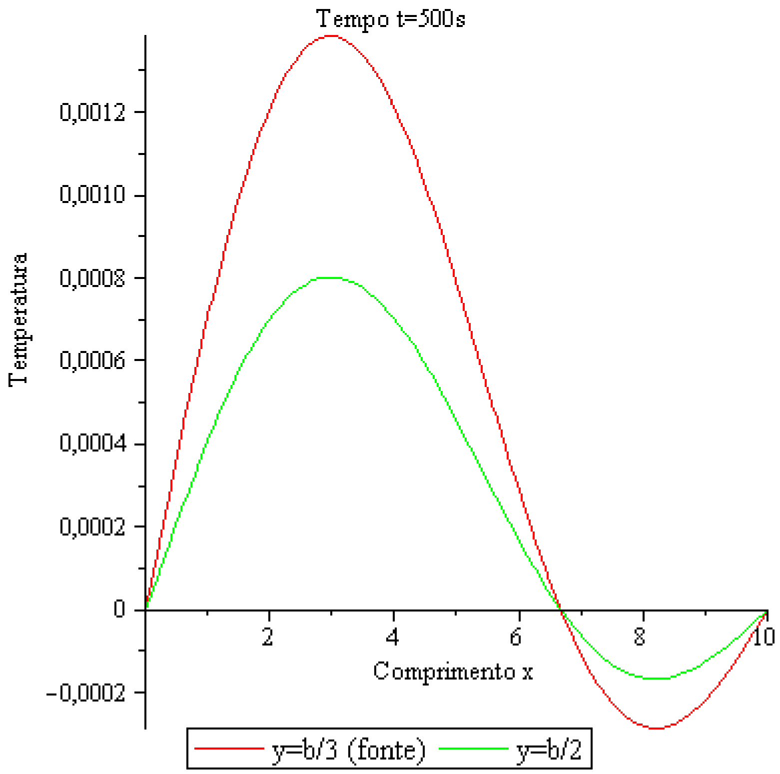

Figura 2: Influência da proximidade da fonte de calor na temperatura da placa.

A segunda análise mostra o efeito do número de termos da série considerados no cálculo. Foram feitos cálculos usando 3, 10 e 50 termos da série e os resultados são apresentados no gráfico abaixo. A figura mostra a distribuição de temperatura ao longo de uma linha na direção x, passando na posição y=b/3, no tempo t=500s.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

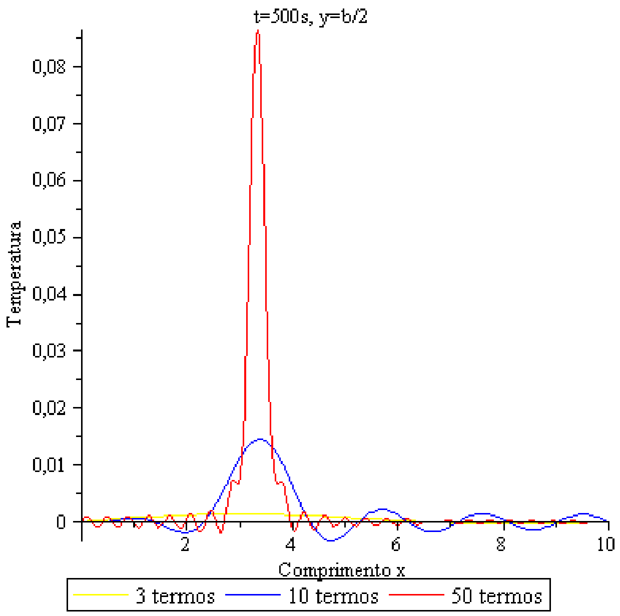

Figura 3: Influência do número de termos na distribuição de temperatura da placa.

No gráfico da figura 3 nota-se a influência do número de termos considerados para a convergência dos resultados. Quanto maior o número de termos da série maior a temperatura.

A terceira análise feita mostra a distribuição de temperatura ao longo de toda a superfície do chip no tempo t=500s, indicando as linhas isotermas como podemos ver na figura 4.a na figura 4.b.

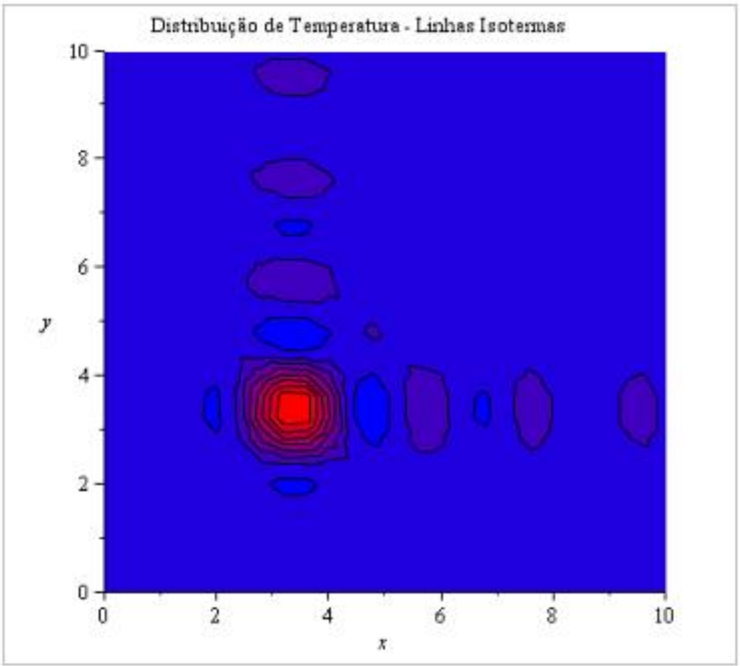

Figura 4 a: Análise feita mostra a distribuição de temperatura ao longo de toda a superfície do chip no tempo

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

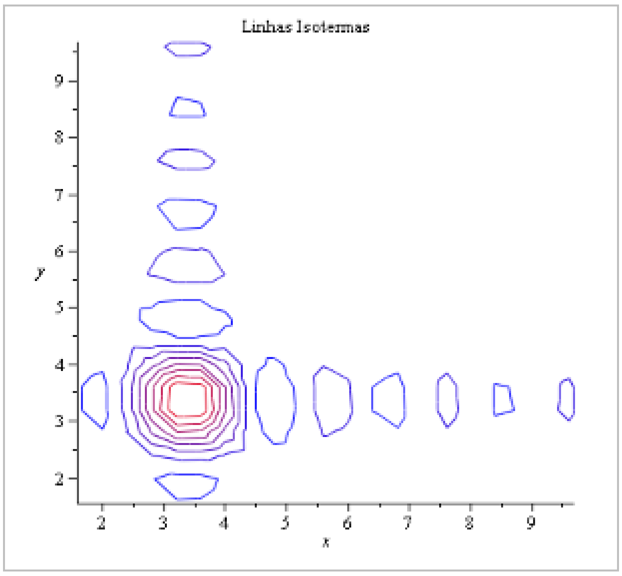

Figura 4 b: Análise feita mostra a distribuição de temperatura ao longo de toda a superfície do chip no tempo

CONSIDERAÇÕES

Foi apresentado neste trabalho o procedimento para a resolução de problemas de condução de calor usando o método de Funções de Green. Com base neste conhecimento, foi proposto um exemplo prático para ser resolvido através desse método, evidenciando a sua eficiência e utilidade. O exemplo prático resolvido trata sobre um problema bidimensional de condução de calor em regime transiente, com geração interna de calor. Mais especificamente, a ideia era obter a distribuição de temperatura em um chip, onde um componente eletrônico dissipa energia a uma taxa constante. A equação diferencial que rege este problema é não-homogênea, o que dificulta a sua solução. Neste trabalho o método de funções de Green foi empregado e o problema foi resolvido com relativa facilidade. É possível perceber que este método tem grande aplicação na área de ciências térmicas.

Para resolver o exemplo prático proposto foi utilizado o *software* Maple. Este *software* é uma ferramenta muito eficiente e prática para a solução de problemas matemáticos, além de permitir a confecção de gráficos e animações que ajudam a compreender melhor os fenômenos físicos por trás das equações matemáticas.

REFERÊNCIAS

BECK, J. V. *et al*. **Heat Conduction Using Green's Functions**. USA: Ed. HPC, 1992.

CARSLAW, H. S.; JAEGER, J. C. "**Conduction of Heat in Solids**". USA: Ed. Oxford Science Publications, 1980.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

KREYSZIG, E. “**Advanced Engineering Mathematics**”. 8^{Th} Edition. USA: Ed. John Wiley & Sons, 1999.

ÖZISIK, M. N. “**Heat Conduction**”, USA: Ed. John Wiley & Sons, 1980.