RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

A ÁLGEBRA DOS OCTÔNIOS $\mathbb{O}$

THE OCTONIONS ALGEBRA $\mathbb{O}$

EL ÁLGEBRA DE OCTONIONES $\mathbb{O}$

Lia Nojosa Sena[1], Iago de Andrade Dantas[2], Rubens Cainan Saboia Monteiro[3]

e463315
https://doi.org/10.47820/recima21.v4i6.3315

PUBLICADO: 06/2023

RESUMO
O presente artigo tem como objetivo apresentar uma construção da álgebra dos octônios junto com o estudo de várias propriedades desta álgebra. Apresentaremos uma nova maneira de construção da álgebra dos quatérnios $\mathbb{H}$ utilizando o processo de duplicação de Cayley-Dickson, que auxilia na construção da álgebra dos octônios.

PALAVRAS-CHAVE: Álgebras de divisão. Álgebras não associativas. Álgebras alternativas.

ABSTRACT
This article aims to present a construction of octonions algebra together with the study of several properties of this algebra. We will present a new way of constructing the quaternions algebra $\mathbb{H}$ *using the Cayley-Dickson doubling procedure which helps in the construction of the octonions algebra.*

KEYWORDS: *Division algebras. No-associative algebras. Alternative algebras.*

RESUMEN
Este artículo tiene como objetivo presentear una construcción del álgebra de octoniones junto com el estudio de varias propiedades de esta álgebra. Presentaremos una nueva forma de construir el álgebra de cuaternions $\mathbb{H}$ *utilizando el proceso de duplicación de Cayley-Dickson que ayuda en la construcción del álgebra de octoniones.*

PALABRAS CLAVE: *Álgebras de división. Álgebras no asociativas. Álgebras alternativas.*

INTRODUÇÃO

O presente artigo tem como objetivo apresentar uma construção da álgebra dos octônios junto com o estudo de várias propriedades desta álgebra.

Os octônios são números da forma:

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7,$$

com $a_0, a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ números reais arbitrários e $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6, i_7$ são unidades imaginárias, isto é, $i_l^2 = -1$, $\forall\, l \in \{1, \cdots, 7\}$.

Descreveremos um processo que permite a construção dos octônios através dos quatérnios como um caminho natural. Mostraremos que este é um processo de duplicação, também conhecido como processo de Cayley-Dickson, devido aos matemáticos Artur Cayley (1821-1895) e Leonard

[1] Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Ceará.
[2] Professor no Instituto Federal do Ceará.
[3] Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Ceará.

Eugene Dickson (1874-1954), no qual os octônios surgem como o resultado de uma "duplicação" dos quatérnios. Esta duplicação pode ser usada para obter os octônios a partir dos quatérnios, como também os quatérnios a partir dos complexos e os complexos a partir dos números reais. Esse processo pode ser repetido indefinidamente, mas à medida que a dimensão aumenta, as perdas de propriedades tornam-se cada vez maiores e essas álgebras são mais difíceis de se trabalhar. Por exemplo, a duplicação da álgebra dos octônios resulta numa álgebra de dimensão 16 com uma tabela de multiplicação 16 × 16. Uma das principais perdas é que essa álgebra não será mais de divisão sobre os reais, pois foi demonstrado pelos matemáticos Michel André Kervaire (1927-2007) e John Willard Milnor (1931-) em 1958 que a dimensão de uma álgebra de divisão sobre os reais é 1, 2, 4 ou 8.

1 REFERENCIAL TEÓRICO

Nesta seção apresentaremos conceitos fundamentais para o entendimento da construção da álgebra dos octônios.

Definição 1.1: Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Este espaço é chamado álgebra sobre $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{R}$-álgebra, ou álgebra real) se for possível definir sobre V uma operação binária como abaixo, que chamaremos de multiplicação,

$$V \times V \to V$$

$$(x\,, y) \mapsto xy$$

satisfazendo as duas leis distributivas a seguir,

$$(\alpha x + \beta y)z = \alpha(xz) + \beta(yz)$$

$$x(\alpha y + \beta z) = \alpha(xy) + \beta(xz)$$

com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $x, y, z \in V$. Em outras palavras, se a multiplicação for bilinear.

Em particular, as relações

$$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$$

são sempre válidas.

Se vale a lei associativa $x(yz) = (xy)z$, com $x,\ z,\ y \in V$, então a álgebra é chamada associativa. Se vale a lei comutativa $xy = yx$, com $x, y \in V$, então a álgebra é dita comutativa. Em geral, as $\mathbb{R}$-álgebras não são comutativas e nem associativas.

Um elemento $1 \in V$ *é* chamado de elemento identidade (ou elemento unidade) se $1x = x1 = x, \forall x \in V.$ Quando V possui um elemento identidade, ela é chamada álgebra com identidade. Se a unidade $1 = 0$, então $x = 1x = 0x = 0$ para todo $x \in V$, isto é, $V = 0$.

Para distinguir álgebras definidas a partir do espaço vetorial V, o símbolo da multiplicação é muitas vezes indicado de modo explícito como parte da notação, de modo que escrevemos

$$\mathcal{A} := (V,\cdot).$$

A dimensão da álgebra $\mathcal{A}$ sobre $\mathbb{R}$,denotada por $dim\ \mathcal{A}$, é a dimensão do espaço vetorial V sobre $\mathbb{R}$, isto é, $dim\ \mathcal{A} = dim\ V$.

Assim, uma álgebra $\mathcal{A}$ n-dimensional sobre $\mathbb{R}$ consiste em todas as combinações lineares

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varepsilon_i$$

de n elementos básicos $\varepsilon_1, \cdots, \varepsilon_n$ com coeficientes α_i em $\mathbb{R}$.

Definição 1.2: Uma álgebra $\mathcal{A} \neq 0$ sobre $\mathbb{R}$ é dita uma álgebra de divisão, se, para quaisquer $a,\ b \in V$, com $a \neq 0$, as duas equações:

$$ax = b$$

$$ya = b$$

têm soluções únicas em $\mathcal{A}$. No caso em que a álgebra $\mathcal{A}$ é associativa, a condição para ser álgebra de divisão é que todo $a \neq 0$ tem inverso (único).

Exibiremos, a seguir, alguns exemplos de álgebras de divisão.

1. O corpo dos números reais é uma $\mathbb{R}$-álgebra de dimensão 1, com elemento identidade e sem divisores de zero. Essa álgebra é comutativa, associativa e com divisão.
2. O corpo $\mathbb{C}$ dos números complexos é uma álgebra real. A dimensão dessa álgebra, isto é, a dimensão de $\mathbb{C}$ como espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, é igual a 2. Temos que $B = (1, i)$, onde $i^2 = -1$, é uma base de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{R}$. Dado $z \in \mathbb{C}$, existem $a,\ b \in \mathbb{R}$ tais que $z = a + bi$. Chamamos a de parte real e b de parte imaginária de z . Se $z = a + bi$ e $w = c + di$ são números complexos, então $z + w = (a + c) + (b + d)i$ e $zw = (ac - bd) + (bc - ad)i$. Essa multiplicação é comutativa e associativa, o que torna $\mathbb{C}$ uma álgebra que é comutativa e associativa. O número complexo $\overline{z} = a - bi$ é chamado conjugado de z . O número real não negativo $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ é chamado de módulo de z . Além disso, $z = 0$ se e somente se $|z| = 0$. Se $|z| \neq 0$, então $\frac{\overline{z}}{|z|^2}$ satisfaz $zw = wz = 1$. Assim, $\mathbb{C}$ é uma álgebra de divisão.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

3. O conjunto dos quatérnios $\mathbb{H}$ é composto por números da forma $a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$, com $a_l \in \mathbb{R}$, com $l \in \{1, 2, 3, 4\}$, a regra de adição é dada por $(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) + (b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i + (a_3 + b_3)j + (a_4 + b_4)k$. Para determinar a regra da multiplicação é suficiente atribuir valores aos produtos dos números $i,\ j,\ k$ dados por:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k \qquad ji = -k$$

$$jk = i \qquad kj = -i$$

$$ki = j \qquad ik = -j$$

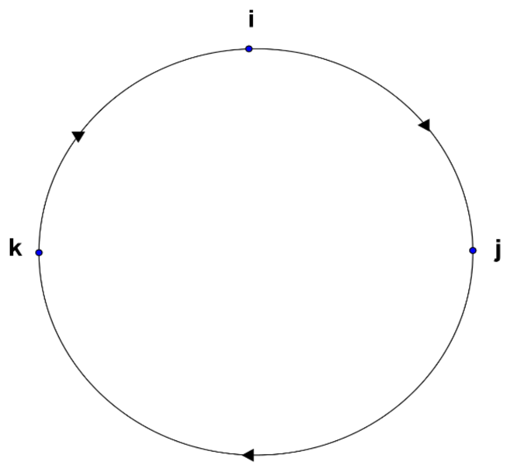

Figura 1

Fonte: Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)

A álgebra dos quatérnios $\mathbb{H}$ é uma álgebra sobre os reais de dimensão quatro não comutativa, associativa e de divisão.

1.3 Outra maneira de construção dos quatérnios $\mathbb{H}$

Usando o fato de que $ij = k$, podemos escrever para qualquer quatérnio

$$q = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k$$

na forma

$$q = (a_0 + a_1 i) + (a_2 + a_3 i)j$$

ou

$$q = z_1 + z_2 j$$

com $z_1 = a_0 + a_1 i$ e $z_2 = a_2 + a_3 i$.

Com essa nova forma de escrever os quatérnios, consideremos a sua multiplicação. Tome o quatérnio r dado por

$$r = w_1 + w_2 j.$$

E considere o produto:

$$qr = (z_1 + z_2 j)(w_1 + w_2 j)$$

$$= z_1 w_1 + z_1(w_2 j) + (z_2 j)w_1 + (z_2 j)w_2 j$$

$$= z_1 w_1 + z_1 w_2 j + z_2 j w_1 + z_2 j w_2 j. \qquad (1.1.1)$$

Os parênteses podem ser retirados pois a álgebra dos quatérnios é associativa. Como $ij = -ji$, temos $(a_0 + a_1 i)j = a_0 j + a_1 ij = a_0 j - a_1 ji = j(a_0 - a_1 i)$, isto é,

$$z_1 j = j\overline{z_1}.$$

Temos que dois elementos z e w da forma $a + bi$ comutam,

$$zw = wz.$$

Com estas propriedades em mente, reescrevemos o segundo termo do lado direito de (1.1.1) como $z_1 w_2 j = w_2 z_1 j$, o terceiro termo sendo $z_2 j w_1 = z_2 \overline{w_1} j$, e o quarto, $z_2 j w_2 j = z_2 \overline{w_2} j j = z_2 \overline{w_2} j^2 = -z_2 \overline{w_2}$. Segue que

$$qr = z_1 w_1 + w_2 z_1 j + z_2 \overline{w_1} j - z_2 \overline{w_2}$$

$$= (z_1 w_1 - \overline{w_2} z_2) + (w_2 z_1 + z_2 \overline{w_1})j. \qquad (1.1.2)$$

Um ponto importante sobre a representação dos quatérnios na forma $q = z_1 + z_2 j$, isto é, quando $i^2 = -1$, é que todos os quatérnios da forma $a + bi$ podem ser vistos como números complexos. Esse fato e a fórmula (1.1.2) justificam a definição que segue.

Definimos os quatérnios como expressões da forma $z_1 + z_2 j$ quando z_1 e z_2 são números complexos e j é um símbolo, que são multiplicados conforme (1.1.2).

2 RESULTADOS

Nesta seção apresentaremos o processo de duplicação de Cayley-Dickson e as propriedades da álgebra dos octônios.

2.1 Processo de duplicação

Seja $\mathcal{U}$ uma álgebra com elementos da forma

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

$$\boldsymbol{u = a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + \cdots \; + a_n i_n},$$

com alguma regra de multiplicação definida. Seja o elemento

$$\boldsymbol{\overline{u} = a_0 - a_1 i_1 - a_2 i_2 - \cdots - a_n i_n}$$

o conjugado de $\boldsymbol{u}$.

Agora definimos $\mathcal{U}^{(2)}$, a $\mathcal{U}$ duplicada, uma álgebra com dimensão $2n$, cujos elementos são expressões da forma

$$u_1 + u_2 e. \qquad \text{(2.1.1)}$$

com u_1 e u_2 elementos arbitrários em $\mathcal{U}$ e e um novo símbolo.

Os elementos de $\mathcal{U}^{(2)}$ são adicionados de acordo com a regra

$$(u_1 + u_2 e) + (v_1 + v_2 e) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)e$$

e a multiplicação é dada por

$$(u_1 + u_2 e)(v_1 + v_2 e) = (u_1 v_1 - \overline{v_2} u_2) + (v_2 u_1 + u_2 \overline{v_1})e, \qquad \text{(2.1.2)}$$

onde a barra denota conjugação em $\mathcal{U}$.

A forma usual de um elemento em $\mathcal{U}^{(2)}$ é

$$a_0 + a_1 i_1 + \cdots + a_n i_n + a_{n+1} i_{n+1} + \cdots + a_{2n+1} i_{2n+1}. \qquad \text{(2.1.3)}$$

Sendo os pares de elementos u_1 e u_2 em $\mathcal{U}$ dados por $u_1 = a_0 + a_1 i_1 + \cdots + a_n i_n$ e $u_2 = a_{n+1} i_{n+1} + \cdots + a_{2n+1} i_{2n+1}$ e assim os elementos de (2.1.1) podem ser considerados como uma forma de escrever simplificada de (2.1.3). Além disso, a definição da multiplicação em (2.1.2) é mais curta e mais clara do que uma definição em termos de uma tabela de multiplicação. Claro que a fórmula (2.1.2) pode ser usada para obtermos a tabela da multiplicação para as "unidades imaginárias" i_1, i_2, $\cdots$, $i_{2n\,+\,1}$. Não vamos produzir essa tabela em geral, mas iremos detalhá-la a seguir para os octônios.

Agora que definimos o processo de duplicação, é fácil ver que no começo dessa sessão nós obtivemos os quatérnios a partir da duplicação dos números complexos. Em seguida definiremos os octônios a partir da duplicação dos quatérnios. Todas as propriedades nos octônios fluirão naturalmente dessa definição.

2.2 A tabela de multiplicação dos octônios

Por definição, os octônios são números da forma

$$\boldsymbol{q_1 + q_2 e},$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

quando $\boldsymbol{q_1}$ e $\boldsymbol{q_2}$ são quatérnios arbitrários. Seja o octônio $\boldsymbol{r_1 + r_2 e}$. A multiplicação será dada por

$$(\boldsymbol{q_1 + q_2 e})(\boldsymbol{r_1 + r_2 e}) = (\boldsymbol{q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2}) + (\boldsymbol{r_2 q_1 + q_2 \overline{r_1}})\boldsymbol{e}. \qquad (2.2.1)$$

Consideremos a conexão entre a definição dos octônios e sua representação na forma

$$a_0 + a_1 i_1 + a_2 i_2 + a_3 i_3 + a_4 i_4 + a_5 i_5 + a_6 i_6 + a_7 i_7. \qquad (2.2.2)$$

Mais precisamente, construiremos a tabela da multiplicação para as “unidades imaginárias” $i_1, i_2, \cdots, i_7$.

Os quatérnios q_1 e q_2 que correspondem à representação (2.2.2) são

$$\boldsymbol{q_1 = a_0 + a_1 i + a_2 j + a_3 k}$$

e

$$\boldsymbol{q_2 = a_4 + a_5 i + a_6 j + a_7 k}.$$

Para uma maior uniformidade, reescreveremos a representação (2.2.2) como

$$a + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK,$$

onde a, b, c, d, A, B, C, D estão no lugar de $a_0, a_1, \cdots, a_7$ como sendo novos símbolos para unidades imaginárias $i_1, i_2, \cdots, i_7$.

Agora, os quatérnios q_1 e q_2 são escritos como

$$q_1 = a + bi + cj + dk$$

e

$$q_2 = A + BI + CJ + DK.$$

Começando com (2.2.1) podemos, como observado anteriormente, construir a tabela da multiplicação para as unidades i, j, k, E, I, J, K. Por exemplo, se em (2.2.1) colocarmos que $q_2 = r_2 = 0$, então

$$(q_1 + 0e) + (r_1 + 0e) = q_1 r_1 + 0e.$$

Assim, os octônios q_1 *e* r_1 são multiplicados igualmente aos quatérnios. Segue que a tabela da multiplicação para as unidades i, j, k é a mesma para os quatérnios:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k \qquad ji = -k$$

$$jk = i \qquad kj = -i$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

$$ki = j \qquad\qquad ik = -j.$$

Logo, temos 9 produtos dos 49 produtos (são 7 × 7 = 49 produtos das 7 unidades). Em vez de uma tabela com os 40 produtos restantes, daremos um esquema para recordar toda a tabela. Primeiro, a coleção de 7 triplas:

$$ijk \quad \boxed{\begin{array}{ccc} I & J & -k \\ I & -j & K \\ -i & J & K \end{array}} \quad \boxed{\begin{array}{ccc} i & E & I \\ j & E & J \\ k & E & K \end{array}}$$

Figura 2

Fonte: Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)

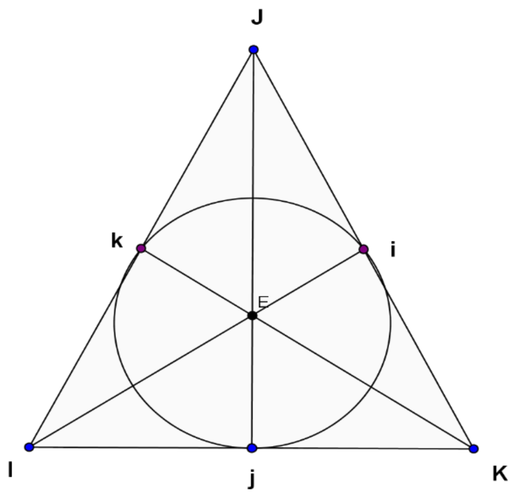

Figura 3

Fonte: Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)

Para lembrar deles, note que as triplas do quadro à esquerda são obtidas a partir da tripla $i,\ j,\ k$ colocando um sinal de menos na frente dos símbolos da tripla $i,\ j,\ k$ e os outros dois sendo I e J. Já para o quadro à direita, centralizamos o símbolo E e os outros dois símbolos são os mesmos, exceto para os tipos. Para a multiplicação então, sejam $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ denotando para qualquer das 7 triplas.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Coloque

$$\alpha^2 = \beta^2 = \gamma^2 = \alpha\beta\gamma = -1,$$

$$\boldsymbol{\alpha\beta} = \boldsymbol{\gamma} \quad \boldsymbol{\beta\alpha} = -\boldsymbol{\gamma}$$

$$\boldsymbol{\beta\gamma} = \boldsymbol{\alpha} \quad \boldsymbol{\gamma\beta} = -\boldsymbol{\alpha}$$

$$\boldsymbol{\gamma\alpha} = \boldsymbol{\beta} \quad \boldsymbol{\alpha\gamma} = -\boldsymbol{\beta}$$

isto é, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ são multiplicados igualmente aos quatérnios $i,\ j,\ k$.

A Figura 1 mostra uma boa ilustração para a regra. Ela mostra um triângulo com vértices $I,\ J,\ K$ cujas medianas encontram os lados $i,\ j,\ k$ e intersectam E. Existem três “unidades” imaginárias” em cada linha. As unidades $i,\ j,\ k$ também estão sobre uma linha (representada pelo círculo). Ao todo, existem 7 linhas e três unidades em cada linha. Desconsiderando o sinal, o produto de duas unidades é a unidade “colinear” com elas.

Para obter um esquema de multiplicação correto para as unidades $i,\ j,\ k,\ E,\ I,\ J,\ K$ basta colocar (nesta figura) $i,\ j,\ k$ em qualquer linha, marcar em algum dos pontos restantes o E e colocar $I,\ J,\ K$ nas linhas $iE,\ jE,\ kE$, respectivamente. Agora, para colocarmos os sinais corretamente nos produtos, substituamos nas coordenadas $i,\ j,\ k$ da linha do círculo para cada linha dos quadros e façamos a multiplicação seguindo a regra dos quatérnios. Por exemplo,

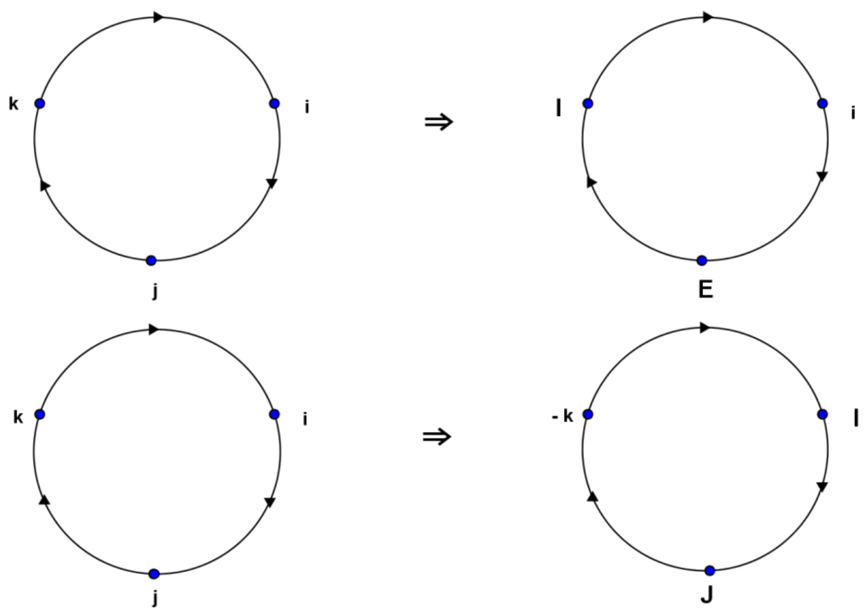

Figura 4
Fonte: Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Portanto, a tabela da multiplicação é dada por:

	1	i	j	k	E	I	J	K
1	1	i	j	k	E	I	J	K
I	i	-1	k	$-j$	I	$-E$	$-K$	J
J	j	$-k$	-1	i	J	K	$-E$	$-I$
K	k	J	$-i$	-1	K	$-J$	I	$-E$
E	E	$-I$	$-J$	$-K$	-1	I	j	K
I	I	E	$-K$	J	$-i$	-1	$-k$	J
J	J	K	E	$-I$	$-j$	K	-1	$-i$
K	K	$-J$	I	E	$-k$	$-j$	i	-1

Tabela 1

Fonte: Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)

2.3 Construção dos octônios e seu valor absoluto

Seja

$$u = a + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK \qquad (2.3.1)$$

um octônio qualquer. Sua conjugação é dada por

$$\overline{u} = a - bi - cj - dk - AE - BI - CJ - DK.$$

Se em (2.3.1) usarmos a representação curta

$$u = q_1 + q_2 e,$$

onde

$$q_1 = a + bi + cj + dk$$

e

$$q_2 = A + Bi + Cj + Dk,$$

então a conjugação é dada por

$$\overline{u} = \overline{q_1} - q_2 e.$$

Agora calculemos o produto de um octônio u por seu conjugado $\overline{u}$. Acontece que, como no caso dos números quatérnios e complexos, este produto é um número real (isto é, um octônio da forma $a + 0i + 0j + 0k + 0E + 0I + 0J + 0K$). De fato,

$$u\overline{u} = (q_1 + q_2 e)(\overline{q_1} - q_2 e)$$

$$= (q_1\overline{q_1} + \overline{q_2}q_2) + (-q_2 q_1 + q_2 q_1)e$$

e

$$\overline{u}u = (\overline{q_1} - q_2 e)(q_1 + q_2 e)$$

$$= (\overline{q_1}q_1 \ + \overline{q_2}q_2) + (q_2\overline{q_1} - q_2\,\overline{q_1})e.$$

Tendo em mente que, para os quatérnios, $q\overline{q} = \overline{q}q = |q|^2$, vemos que

$$u\overline{u} = q_1\overline{q_1} + \overline{q_2}q_2 = |q_1|^2 + |q_2|^2 = \overline{q_1}q_1 \ + \ \overline{q_2}q_2 = \overline{u}u. \qquad (2.3.2)$$

A raiz quadrada de $|q_1|^2 + |q_2|^2$ é dita ser o valor absoluto da norma do octônio u e denotado por $|u|$. Note que se u é dado da forma (2.3.1), então o quadrado do valor absoluto é

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + E^2 + B^2 + C^2 + D^2.$$

Em vista da definição de valor absoluto temos $u\overline{u} = \overline{u}u = |u|^2$.

2.4 O valor absoluto do produto de octônios

A propriedade que o valor absoluto do produto de dois números é igual ao produto de seus valores absolutos continua válida para os octônios:

$$|uv| = |u||v|, \qquad (2.4.1)$$

onde $u, v \in \mathbb{O}$ e $u = q_1 + q_2 e$ e $v = r_1 + r_2 e$.

Ou equivalentemente,

$$|uv|^2 = |u|^2 + |v|^2. \qquad (2.4.2)$$

Provaremos (2.4.2). Usando a fórmula (2.3.2) no produto

$$uv \ = (q_1 + q_2 e)(r_1 + r_2 e)$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

$$= (q_1 r_1 - \overline{r_2}\, q_2) + (r_2 q_1 + q_2\, \overline{r_1}\,)e,$$

obtemos:

$$|uv|^2 = (uv)(\overline{uv})$$

$$= (q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2)\left(\overline{q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2}\right) + \left(\overline{r_2 q_1 + q_2\, \overline{r_1}}\right)(r_2 q_1 + q_2\, \overline{r_1})$$

$$= (q_1 r_1 - \overline{r_2} q_2)(\overline{r_1}\, \overline{q_1} - \overline{q_2}\, r_2) + (\overline{q_1}\, \overline{r_2} - r_1\, \overline{q_2})(r_2 q_1 + q_2\, \overline{r_1})$$

$$= q_1\, r_1\, \overline{r_1}\, \overline{q_1} \;+ \overline{r_2}\, q_2\, \overline{q_2}\, r_2 + r_2\, q_1\, r_1\, \overline{q_2} + q_2\, \overline{r_1}\, \overline{q_1}\, \overline{r_2} - q_1\, r_1\, \overline{q_2}\, r_2 -$$
$$\overline{r_2}\, q_2\, \overline{r_1}\, \overline{q_1} \;+ \overline{q_1}\, \overline{r_2}\, r_2\, q_1 + r_1\, \overline{q_2}\, q_2\, r_1. \qquad (2.4.3)$$

Por outro lado, obtemos:

$$|u|^2|v|^2 = (u\overline{u})(v\overline{v})$$

$$= (q_1\overline{q_1} + q_2\overline{q_2})(r_1\overline{r_1} + r_2\overline{r_2})$$

$$= q_1\overline{q_1} r_1\overline{r_1} + q_1\overline{q_1} r_2\overline{r_2} + q_2\overline{q_2} r_1\overline{r_1} + q_2\overline{q_2} r_2\overline{r_2}. \qquad (2.4.4)$$

Se compararmos (2.4.3) e (2.4.4) veremos que essas expressões diferem por uma soma S de quatro termos:

$$S = r_2 q_1 r_1 \overline{q_2} + q_2 \overline{r_1}\, \overline{q_1}\, \overline{r_2} - q_1 r_1 \overline{q_2} r_2 - \overline{r_2}\, q_2\, \overline{r_1}\, \overline{q_1}.$$

Agora vamos mostrar que $S = 0$ para quaisquer quatérnios $q_1,\ q_2,\ r_1,\ r_2$. Se r_2 é real, então $S = 0$. Se r_2 for um imaginário puro, então $\overline{r_2} = -r_2$. Logo:

$$S = r_2(q_1 r_1 \overline{q_2} + q_2 \overline{r_1}\, \overline{q_1}) - (q_1 r_1 \overline{q_2} + q_2 \overline{r_1}\, \overline{q_1}) r_2.$$

As expressões em parênteses são as somas de dois quatérnios conjugados. Logo, as expressões em parênteses são iguais a algum número real, digamos que esse número seja c. Assim,

$$S = r_2 c - c r_2 = 0.$$

Uma propriedade de S é: se S anula para $r_2 = a$ e $r_2 = b$, então também anula para $r_2 = a + b$. Como todo quatérnio é a soma de um número real com um quatérnio imaginário puro e, para cada um desses, $S = 0$, segue que sempre teremos $S = 0$.

2.5 A Identidade de oito quadrados

A identidade

$$|uv|^2 = |u|^2|v|^2, \qquad (2.5.1)$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

estabelecida na subseção anterior nos ajuda no problema “soma de quadrados”. Agora trabalharemos com o seguinte problema: “o produto da soma de oito quadrados é uma soma de oito quadrados”.

De fato, se

$$u = a + bi + cj + dk + AE + BI + CJ + DK,$$

$$v = a' + b'i + c'j + d'k + A'E + B'I + C'J + D'K,$$

e

$$uv = \Phi_0 + \Phi_1 i + \Phi_2 j + \Phi_3 k + \Phi_4 E + \Phi_5 I + \Phi_6 J + \Phi_7 K,$$

então a identidade (2.5.1) toma a forma

$$(a^2 + \cdots + D^2)(a'^2 + \cdots + D'^2) = \Phi_0^2 + \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \Phi_3^2 + \Phi_4^2 + \Phi_5^2 + \Phi_6^2 + \Phi_7^2.$$

Devemos fazer uso da multiplicação dos octônios para expressar $\Phi_0, \Phi_1, \cdots, \Phi_7$ em termos de $a, \cdots, D, a', \cdots, D'$. Essa tarefa fornece a identidade:

$$\begin{aligned}
&(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + A^2 + B^2 + C^2 + D^2) \\
&\qquad \times ((a')^2 + (b')^2 + (c')^2 + (d')^2 + (A')^2 + (B')^2 + (C')^2 + (D')^2) = \\
&\qquad = (aa' - bb' - cc' - dd' - AA' - BB' - CC' - DD')^2 \\
&\qquad +(ab' + ba' + cd' - dc' - A'B + B'A + C'D - D'C)^2 \\
&\qquad +(ac' + ca' - bd' + db' - A'C + C'A - B'D + D'B)^2 \\
&\qquad +(ad' + da' + bc' - cb' - A'D + D'A + B'C - C'B)^2 \\
&\qquad +(A'a - B'b - C'c - D'd + Aa' + Bb' + Cc' + Dd')^2 \\
&\qquad +(A'b + B'a + C'd - D'c - Ab' + Ba' - Cd' + Dc')^2 \\
&\qquad +(A'c + C'a - B'd + D'b - Ac' + Ca' + Bd' - Db')^2 \\
&\qquad +(A'd + D'a + B'c - C'b - Ad' + Da' - Bc' + Cb')^2.
\end{aligned}$$

Um fato interessante, que na busca por uma identidade de oito quadrados levou o matemático Cayley à descoberta dos octônios.

2.6 A não-associatividade da multiplicação dos octônios e a propriedade alternativa

Os octônios compartilham muitas propriedades, mas não todas, com os números complexos e quatérnios. Assim, enquanto a multiplicação dos complexos e quatérnios é associativa, a multiplicação dos octônios não é. Por exemplo,

$$(ij)E \neq i(jE).$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Para justificar isso, observe que

$$(ij)E = kE = K$$

e

$$i(jE) = iJ = -K.$$

Obviamente, a não-associatividade da multiplicação dos octônios não significa que para todos $u, v, w \in \mathbb{O}$ temos $(uv)w \neq u(vw)$. Mostraremos que as igualdades abaixo são válidas para quaisquer dois octônios u, v:

$(uv)v = u(vv),$	(2.6.1)
$v(vu) = (vv)u.$	(2.6.2)

Dizemos que (2.6.1) e (2.6.2) são uma forma “fraca” de associatividade. Quando isso acontece, dizemos que a álgebra é alternativa.

Note que para provar (2.6.1) e (2.6.2) é suficiente verificarmos as seguintes igualdades:

$$(uv)\overline{v} = u(v\overline{v}) \qquad (2.6.3)$$

$$\overline{v}(vu) = (\overline{v}v)u \qquad (2.6.4)$$

Ora, se no lugar de $\overline{v}$ colocarmos $-v + 2a$ nas equações acima, onde a é a parte real do octônio v, obteremos (2.6.3) e (2.6.4). De fato, fazendo $\overline{v} = -v + 2a$, temos:

$$(uv)\overline{v} = (uv)(-v + 2a)$$

$$= -(uv)v + 2a(uv) \qquad (2.6.5)$$

$$u(v\overline{v}) = u\big(v(-v + 2a)\big)$$

$$= u(-(vv) + 2av)$$

$$= -u(vv) + 2a(uv) \qquad (2.6.6)$$

e

$$\overline{v}(vu) = (-v + 2a)(vu)$$

$$= -v(vu) + 2a(vu) \qquad (2.6.7)$$

$$(\overline{v}v)u = ((-v + 2a)v))u$$

$$= (-(vv) + 2av)u$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

$$= -(vv)u + 2a(vu). \qquad (2.6.8)$$

Supondo (2.6.3) válida, podemos igualar (2.6.5) e (2.6.6):

$$-(uv)v + 2a(uv) = -u(vv) + 2a(uv)$$

$$-(uv)v + 2a(uv) + u(vv) - 2a(uv) = 0$$

$$-(uv)v + (2a - 2a)(uv) + u(vv) = 0$$

$$(uv)v = u(vv).$$

Supondo (2.6.4) válida, podemos igualar (2.6.7) e (2.6.8):

$$-v(vu) + 2a(vu) = -(vv)u + 2a(vu)$$

$$-v(vu) + 2a(vu) + (vv)u - 2a(vu) = 0$$

$$-v(vu) + (2a - 2a)(vu) + (vv)u = 0$$

$$(vv)u = v(vu).$$

Agora, provaremos (2.6.1) e (2.6.2).

Sejam $u = u_1 + u_2 e$ e $v = v_1 + v_2 e$, onde $u_1,\ u_2,\ v_1,\ v_2 \in \mathbb{H}$, então

$$(uv)\overline{v} = \big((u_1 + u_2 e)(v_1 + v_2 e)\big)(\overline{v_1} - v_2 e)$$

$$= \big((u_1 v_1 - \overline{v_2}\, u_2) + (v_2 u_1 + u_2 \overline{v_1})e\big)(\overline{v_1} - v_2 e)$$

$$= \big((u_1 v_1 - \overline{v_2} u_2)(\overline{v_1}) - (-\overline{v_2})(v_2 u_1 + u_2\, \overline{v_1})\big)$$

$$+ \Big((-v_2)(u_1 v_1 - \overline{v_2} u_2) + (v_2 u_1 + u_2\, \overline{v_1})\left(\overline{\overline{v_1}}\right)\Big) e$$

$$= \ (u_1 |v_1|^2 \ - \ \overline{v_2}\, u_2\, \overline{v_1} \ + \ |v_2|^2 u_1 \ + \overline{v_2}\, u_2\, \overline{v_1})$$

$$+(-v_2 u_1 v_1 + |v_2|^2 u_2 + v_2 u_1 v_1 + u_2 |v_1|^2\,)e$$

$$= (|v_1|^2 + |v_2|^2) u_1 \ + (|v_1|^2 + |v_2|^2) u_2 e$$

$$= (|v_1|^2 + |v_2|^2)(u_1 \ + u_2 e)$$

$$= |v|^2 u.$$

Observe que $v\overline{v} \ = \ |v|^2$, logo,

$$u(v\overline{v}) = u|v|^2 = |v|^2 u,$$

o que implica em (2.6.1).

$$\overline{v}(vu) = (\overline{v_1} - v_2 e)\big((v_1 + v_2 e)(u_1 + u_2 e)\big)$$

$$= (\overline{v_1} - v_2 e)\big((v_1 u_1 - \overline{u_2}\, v_2) + (u_2 v_1 + v_2\, \overline{u_1})e\big)$$

$$= \left((\overline{v_1})(v_1 u_1 - \overline{u_2}\, v_2) - \left(\overline{u_2 v_1 + v_2\, \overline{u_1}}\right)(-v_2)\right)$$

$$+ \left((u_2 v_1 + v_2\, \overline{u_1}\,)(\overline{v_1}) + (-v_2)\left(\overline{v_1 u_1 - \overline{u_2}\, v_2}\right)\right) e$$

$$= \left(|v_1|^2 u_1 - \overline{v_1}\,\overline{u_2} v_2 - (\overline{v_1}\,\overline{u_2} + u_1 \overline{v_2})(-v_2)\right)$$

$$+ \left(u_2 |v_1|^2 + v_2 \overline{u_1}\,\overline{v_1} + (-v_2)(\overline{u_1}\,\overline{v_1} - \overline{v_2}\, u_2)\right) e$$

$$= (|v_1|^2 u_1 - \overline{v_1}\,\overline{u_2} v_2 + \overline{v_1}\,\overline{u_2} v_2 + u_1 |v_2|^2)$$

$$+ (u_2 |v_1|^2 + v_2 \overline{u_1}\,\overline{v_1} - v_2 \overline{u_1}\,\overline{v_1} + |v_2|^2 u_2) e$$

$$= (|v_1|^2 + |v_2|^2) u_1 + (|v_1|^2 + |v_2|^2) u_2 e$$

$$= (|v_1|^2 + |v_2|^2)(u_1 + u_2 e\,)$$

$$= |v|^2 u.$$

Como $\overline{v}\, v = |v|^2$, logo

$$(\overline{v}\, v) u = |v|^2 u,$$

o que implica em (2.6.2).

2.7 Divisão de octônios

Sejam u, v dois octônios e $v \neq 0$. Temos que o quociente à direita de u por v é a solução da equação:

$$ux = u, \qquad (2.7.1)$$

e o quociente à esquerda de u por v é a solução da equação

$$xv = u. \qquad (2.7.2)$$

Resolveremos (2.7.1). Como no caso dos quatérnios, multiplicamos à esquerda ambos os lados de (2.7.1) por v. Logo,

$$vx = u \Rightarrow v(vx) = vu.$$

Agora, usamos o fato da álgebra dos octônios ser alternativa, ou seja,

$$vx = u \Rightarrow \overline{v}(vx) = \overline{v}u$$

$$\Rightarrow (\overline{v}v)x = \overline{v}u$$

$$\Rightarrow |v|^2 x = \overline{v}u.$$

Portanto,

$$x = \frac{\overline{v}\,u}{|v|^2}.$$

Substituindo x e usando (2.6.4), verifica-se que é solução de (2.7.1).

De fato, temos

$$vx = \frac{v(\overline{v}u)}{|v|^2}$$

$$= \frac{(v\overline{v})\,u}{|v|^2}$$

$$= \frac{|v|^2 u}{|v|^2}$$

$$= u.$$

Suponha que x' seja outra solução de (2.6.4). Portanto,

$$vx = vx' \Rightarrow \overline{v}(vx) = \overline{v}(vx')$$

$$\Rightarrow (\overline{v}v)x = (\overline{v}v)x'$$

$$\Rightarrow x = x'.$$

Em outras palavras, o quociente à direita de u por v *é*

$$x_D = \frac{\overline{v}u}{|v|^2}$$

Similarmente resolveremos (2.7.2). Como no caso dos quatérnios, multiplicamos à direita ambos os lados de (2.7.2) por $\overline{v}$. Logo,

$$xv = u \Rightarrow (xv)\overline{v} = u\overline{v}.$$

Usaremos o fato da álgebra dos octônios ser alternativa, ou seja,

$$(xv)\overline{v} = u \Rightarrow (xv)\overline{v} = u\overline{v}$$

$$\Rightarrow x(v\overline{v}) = u\overline{v}$$

$$\Rightarrow x|v|^2 = u\overline{v}.$$

Portanto,

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

$$x = \frac{u\overline{v}}{|v|^2}.$$

Substituindo x e usando (2.6.3), verificaremos que é solução de (2.7.2).

De fato, temos

$$\begin{aligned} xv &= \frac{(u\overline{v})v}{|v|^2} \\ &= \frac{u(\overline{v}\,v)}{|v|^2} \\ &= \frac{u|v|^2}{|v|^2} \\ &= u. \end{aligned}$$

Podemos supor que x'' é outra solução de (2.7.2). Portanto,

$$\begin{aligned} xv = x''v &\Rightarrow (xv)\overline{v} = (x''v)\overline{v} \\ &\Rightarrow x(v\overline{v}) = x''(v\overline{v}) \\ &\Rightarrow x = x''. \end{aligned}$$

Assim, quociente à esquerda de (2.7.2) é

$$x_E = \frac{u\overline{v}}{|v|^2}.$$

Portanto, os octônios $\mathbb{O}$ são uma álgebra de divisão.

3 CONSIDERAÇÕES

Ao longo do desenvolvimento desse artigo foi possível compreender a construção da álgebra dos octônios utilizando o processo de duplicação de Cayley-Dickson. No decorrer do trabalho também construímos a tabela de multiplicação dos octônios e estudamos o valor absoluto, o que nos proporcionou verificar que é válida a identidade de oito quadrados. Além disso, verificamos que essa álgebra não é associativa, mas conseguimos uma nova propriedade que é uma forma "fraca" de associatividade, chamada de propriedade alternativa. Por fim, provamos que a álgebra dos octônios é uma álgebra de divisão.

REFERÊNCIAS

EBBINGHAUS, H. D.; HERMES, H.; HIRZEBRUCH, F.; KOECHER, M.; MAINZER, K.; NEUKIRCH, J.; PRESTEL, A.; REMMERT, R. **Graduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics:** Numbers. New York: Springer, 1991.

FELZENSZWALB, B. **Álgebra de dimensão finitas**. Rio de Janeiro*:* IMPA, 1979.

KANTOR, I. L.; SOLODOVNIKOV, A. S. **Hypercomplex Numbers: An elementary introduction to Algebras.** New York: [s. n.], 1989.