RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA COM COEFICIENTE EM $\mathbb{F}_2$

HOMOLOGY AND COHOMOLOGY WITH COEFFICIENT IN $\mathbb{F}_2$

HOMOLOGÍA Y COHOMOLOGÍA CON COEFICIENTE EN $\mathbb{F}_2$

Lia Nojosa Sena[1], Thiago Amaral Melo Lima[2], Rubens Cainan Saboia Monteiro[3]

e463368
https://doi.org/10.47820/recima21.v4i6.3368

PUBLICADO: 06/2023

RESUMO
O presente artigo destina-se ao estudo de ferramentas da Topologia Algébrica: homologia e cohomologia no corpo $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$. Para tanto, apresentaremos conceitos fundamentais para o entendimento desta construção: categoria, funtores, espaços topológicos e espaço projetivo real.

PALAVRAS-CHAVE: Topologia Algébrica. Homologia. Cohomologia.

ABSTRACT
This article aims to study Algebraic Topology tools: homology and cohomology in the field $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$. *Therefore, we will present fundamental concepts for the understanding of this construction: category, functors, topological spaces and real projective space.*

KEYWORDS: *Algebraic Topology. Homology. Cohomology.*

RESUMEN
Este artículo tiene como objetivo estudiar herramientas de Topología Algebraica: homología y cohomología en el cuerpo $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$. *Por tanto, presentaremos conceptos fundamentales para la comprensión de esta construcción: categoria, funtores, espacios topológicos y espacio proyectivo.*

PALABRAS CLAVE: *Topología Algebraica. Homología. Cohomología.*

INTRODUÇÃO

O presente artigo destina-se ao estudo de ferramentas da Topologia Algébrica: homologia e cohomologia no corpo $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$.

O grupo fundamental $\pi_1(X)$ é especialmente útil ao estudar espaços de dimensão baixa, já que sua definição envolve apenas aplicações de espaços de dimensão baixa em X, ou seja, *loops* $I \to X$ e homotopias de *loops*, as aplicações $I \times I \to X$. Em vista da natureza de baixa dimensão do grupo fundamental, não devemos esperar que seja uma ferramenta muito refinada para lidar com espaços de dimensão mais alta. Assim, esta ferramenta não consegue distinguir entre esferas S^n com $n \geq 2$. Esta limitação pode ser removida considerando, naturalmente, os espaços de maior dimensão $\pi_n(X)$, análogos a $\pi_1(X)$, os quais definimos em termos de aplicações em cubos n-dimensionais I^n em X e

[1] Mestre em matemática pela Universidade Federal do Ceará.
[2] Professor no Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano - Campus Salgueiro.
[3] Mestre em Matemática pela Universidade Federal do Ceará.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

homotopias $I^n \times I \to X$. Nesse caso, os grupos de homotopia de fato distinguem esferas de todas as dimensões pois $\pi_i(S^n) = 0$ se $i < n$ ou $\mathbb{Z}$ se $i = n$.

Entretanto, os grupos de homotopia de dimensão mais alta são extremamente difíceis de computar. Mesmo para espaços simples como as esferas, o cálculo de $\pi_i(S^n)$ para $i > n$ é um grande problema. Felizmente existe uma ferramenta mais computável do que os grupos de homotopia: os grupos de homologia $H_n(X)$. Para esferas, os grupos de homologia $H_i(S^n)$ são isomorfos aos grupos de homotopia $\pi_i(S^n)$, com $1 \leq i \leq n$, mas os grupos de homologia têm a vantagem de que $H_i(S^n) = 0$ para $i > n$.

Cohomologia é uma variante algébrica da homologia, o resultado de uma simples dualização na definição. Não surpreendentemente, os grupos de cohomologia $H^n(X)$ satisfazem axiomas muito semelhantes aos axiomas de homologia, exceto que os homomorfimos induzidos vão em direção oposta na dualização. A distinção básica entre homologia e cohomologia é, portanto, que grupos de cohomologia são funtores contraviantes, enquanto os grupos de homologia são covariantes. Em termos de informação intrínseca, no entanto, não existe uma grande diferença entre grupos de homologia e grupos de cohomologia. Os grupos de homologia de um espaço determinam seus grupos de cohomologia, e o inverso é válido exceto quando os grupos de homologia são finitamente gerados.

O que é surpreendente é que a contraviância nos leva a uma estrutura extra na cohomologia. Primeiramente temos um produto natural, chamado *"cup product*", o que torna os grupos de cohomologia de um espaço um anel.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

As subseções dessa seção apresentam conceitos fundamentais para o entendimento da construção das técnicas de homologia e cohomologia com coeficientes em $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$.

1.1 Categorias e funtores

Na Matemática existem vários tipos de objetos: conjuntos, monóides, anéis etc. Para cada tipo de objeto podemos definir tipos especiais de aplicações entre eles (homomorfismos, isomorfismos, homeomorfismos *etc*.). Temos que certas propriedades são comuns a todos eles, tais como a existência de aplicações identidade $id_A: A \to A$ e a associatividade destas aplicações. Podemos assim introduzir a noção de categoria:

Definição 1.1.1**.** Uma categoria consiste em uma coleção de objetos Ob (conjuntos, monóides, grupos); e para dois objetos $A, B \in Ob$, um conjunto $hom(A,B)$ chamado o conjunto de morfismos de A e B (um elemento $f \in hom(A,B)$ é denotado por $f: A \to B$); e para três objetos $A, B, C \in Ob$ uma lei de composição*:*

$$hom(B,C) \times hom(A,B) \to hom(A,C)$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

(para morfismos $f: A \to B$, $g: B \to C$, esta função é escrita como $(g, f) \mapsto g \circ f$ e $g \circ f: A \to C$ é chamada de composição de f e g) que satisfaz os seguintes axiomas:

1. Dois conjuntos $hom(A, B)$ e $hom(A', B')$ são disjuntos a menos que $A = A'$ e $B = B'$, no caso em que eles são iguais;
2. Para cada objeto A de $\mathfrak{D}$ existe um morfismo $id_A \in hom(A, A)$ que atua como identidade à direita e à esquerda para os elementos de $hom(A, B)$ e $hom(B, A)$ respectivamente, para todos os objetos $B \in Ob(\mathfrak{D})$. Isto é, existe o morfismo $id_A: A \to A$ tal que, para cada $f: A \to B$ e $g: B \to A$ temos $f \circ id_A = f$ e $id_A \circ g = g$;
3. A lei da composição é associativa (quando definida), isto é, dadas $f \in hom(A, B)$, $g \in hom(B, C)$ e $h \in hom(C, D)$, então vale

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

para todos os objetos $A, B, C, D \in \mathfrak{D}$.

Exemplo 1.1.2**.** Seja Grp uma categoria de grupos, isto é, uma categoria cujos objetos são grupos e os morfismos são homomorfismos de grupos. Temos que os três axiomas são satisfeitos. De fato, temos que:

1. Dados os conjuntos $hom(A, B)$ e $hom(A', B')$ vale que $hom(A, B) \cap hom(A', B') = \emptyset$ ou $A = A'$ e $B = B'$;
2. Para cada objeto (grupo) $A \in Grp$ existe um morfismo (homomorfismo) $id_A \in hom(A, A)$ tal que $f \circ id_A = f$ e $id_A \circ g = g$, onde $f \in hom(A, B)$ e $g \in hom(B, A)$;
3. Temos que, dados $f \in hom(A, B)$, $g \in hom(B, C)$ e $h \in hom(C, D)$, vale

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f),$$

já que homomorfismo de grupo é associativo.

Também podemos considerar a categoria dos conjuntos *Sets*, cujos objetos são conjuntos e os morfismos são funções e cuja lei de composição de morfismos nada mais é que a composição usual de funções. E temos a categoria dos grupos abelianos Ab, cujos objetos são os grupos abelianos e os morfismos os homomorfismos de grupos, e a lei da composição é a usual. Similarmente, temos a categoria dos monóides, anéis, módulos etc. Temos ainda a categoria *Top* cujos objetos são todos os espaços topológicos e os morfismos são as funções contínuas.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Definição 1.1.3. Sejam $\mathfrak{D}$, $\mathcal{E}$ categorias. Um funtor covariante F de $\mathfrak{D}$ em $\mathcal{E}$ é uma regra que, para cada objeto A em $\mathfrak{D}$, associa um objeto $F(A)$ em $\mathcal{E}$, e para cada morfismo $f: A \to B$ associa um morfismo $F(f): F(A) \to F(B)$ tal que:

1. Para todo A em $\mathfrak{D}$ temos $(id_A) = id_{F(A)}$;
2. Se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são dois morfismos em $\mathfrak{D}$, então

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Definimos a noção de funtor contravariante F para $\mathfrak{D}$ em $\mathcal{E}$ usando essencialmente a mesma definição para funtores covariantes, mas temos uma inversão de setas $F(f)$, isto é, para cada morfismo $f: A \to B$ o funtor contravariante associa um morfismo

$$F(f): F(B) \to F(A)$$

(indo na direção oposta) tal que, se $f: A \to B$ e $g: B \to C$ são morfismos em $\mathfrak{D}$, então

$$F(g \circ f) = F(f) \circ F(g).$$

Às vezes um funtor é denotado por f_* em vez de $F(f)$, no caso de funtores covariantes, e escrito f^* para o caso de funtores contravariantes.

Exemplo 1.1.4. $I_{\mathfrak{D}}: \mathfrak{D} \to \mathfrak{D}$ é um funtor covariante identidade que leva cada objeto e cada morfismo de categorias nele mesmo.

Exemplo 1.1.5. Se para cada grupo G associarmos um conjunto (retiramos a estrutura de grupo), então obtemos um funtor inclusão da categoria de grupos Grp para a categoria de conjuntos Set desde que

$$F: Grp \hookrightarrow Set.$$

Este funtor também é chamado funtor esquecimento (uma vez que basta "esquecer" as estruturas de grupo tanto para o objeto quanto para o morfismo)

Exemplo 1.1.6. Com as informações do Exemplo 1.1.5., a aplicação

$$G: Set \mapsto Grp$$

é um funtor contravariante.

1. 2 Espaços topológicos

A definição de espaço topológico que hoje conhecemos demorou a ser formulada. Vários matemáticos - Fréchet, Hausdorff e outros - propuseram diferentes definições ao longo do século XX, mas demorou até os matemáticos decidirem por uma definição apropriada. Eles desejavam, é claro,

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

uma definição o mais geral possível, a qual incluísse muitos casos especiais que são úteis na Matemática - espaços euclidianos e funções entre esses espaços - porém também queriam que a definição possibilitasse que os teoremas padrões desses espaços valessem em espaços topológicos em geral.

Definição 1.2.1**.** Seja X um conjunto não vazio. Chamaremos de topologia uma família τ de subconjuntos de X que satisfaça as seguintes propriedades:

1. $\emptyset$ e X pertencem a τ;
2. A união arbitrária de membros de τ pertence a τ, ou seja, $\cup_{\alpha\in A} U_\alpha$, onde $U_\alpha \in \tau$, $\forall \alpha \in A$;
3. A interseção finita de membros de τ pertencem a τ, isto é, $\cap_{i\in I} U_i$, onde $U_i \in \tau$ e $|I| < \infty$ (I possui uma quantidade finita de elementos).

Os elementos de τ são chamados de abertos. O par (X, τ) é chamado de espaço topológico.

Exemplo 1.2.2**.** Seja X um conjunto e $\tau = \emptyset, X$. Afirmação: τ é uma topologia.

De fato, temos que:

1. $\emptyset, X \in \tau$, por definição do conjunto τ;
2. $\cup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \tau$, pois $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$, por definição do conjunto τ;
3. $\cap_{i\in I} U_i \in \tau$, pois $\emptyset \in \tau$ e $X \in \tau$, por definição do conjunto τ.

τ é chamada de topologia trivial.

Exemplo 1.2.3**.** Seja X um conjunto e τ sendo a família de todos os subconjuntos de X. Afirmação: τ é uma topologia.

De fato, temos que:

1. $\emptyset, X \in \tau$, já que τ possui todos os subconjuntos de X.
2. $\cup_{\alpha\in A} U_\alpha \in \tau$, onde $U_\alpha \in \tau$, $\forall \alpha \in A$;
3. $\cap_{i\in I} U_i \in \tau$, com $U_i \in \tau$ para $|I| \leq \infty$.

Temos que τ é chamada de topologia discreta.

Exemplo 1.2.4. Na reta $\mathbb{R}$, defina τ como sendo a topologia dada pelos abertos $\emptyset$ e os subconjuntos de $\mathbb{R}$ com complemento finito. Afirmação: τ é uma topologia.

De fato, temos que:

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

1. $\emptyset \in \tau$, por definição, e $X \in \tau$, pois $X^c = \emptyset$ e vazio é finito;
2. Seja $U_\alpha \in \tau,\ \forall \alpha \in A$, isto é, $(U_\alpha)^c$ é finito, $\forall \alpha \in A$. Logo, $(\cup_{\alpha \in A} U_\alpha)^c = \cap_{\alpha \in A} (U_\alpha)^c \in \tau$, pois a interseção arbitrária de conjuntos finitos é um conjunto finito;
3. Seja $U_i \in \tau,\ \forall i \in I$, onde $|I| \leq \infty$, ou seja, $(U_i)^c$ é finito, $\forall i \in I$. Assim, $(\cap_{i \in I} U_i)^c = \cup_{i \in I} (U_i)^c \in \tau$, pois a união finita de conjuntos finitos é finita.

τ é chamada topologia do complementar finito.

Definição 1.2.5. Seja X um conjunto. Uma base para a topologia em X é uma coleção $\mathcal{B}$ de subconjuntos de X (chamados de elementos base) tal que:

1. Para cada $x \in X$, existe pelo menos um elemento base B que contém x;
2. Se x pertence a interseção de dois elementos bases B_1 e B_2, então existe um elemento base B_3 que contém x tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Definição 1.2.6. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f: X \to Y$ é dita contínua se, para cada conjunto aberto V de Y, o conjunto $f^{-1}(V)$ é um subconjunto aberto de X.

Temos que $f^{-1}(V)$ é o conjunto de todos os pontos $x \in X$ tais que $f(x) \in V$. O conjunto $f^{-1}(V)$ é vazio se V não intersecta o conjunto $f(X)$.

A propriedade da continuidade não depende somente da função f, mas também das topologias específicas de seu domínio e contradomínio. Se quisermos enfatizar esse fato, podemos dizer que f é contínua em relação a topologias específicas em X e em Y.

Observemos que, se a topologia do domínio Y é dada por uma base $\mathcal{B}$, então, para provar a continuidade de f, basta mostrar que a imagem inversa de cada elemento base é aberto. O conjunto aberto arbitrário V de Y pode ser escrito como uma união de elementos de base:

$$V = \cup_{\alpha \in J} B_\alpha.$$

Então

$$f^{-1}(V) = \cup_{\alpha \in J} f^{-1}(B_\alpha),$$

de modo tal que $f^{-1}(V)$ é aberto se cada conjunto $f^{-1}(B_\alpha)$ for aberto.

Observe que, dadas $g: Z \to Y$ e $f: Y \to X$ funções contínuas em $f(a)$ e a, respectivamente, então $g \circ f$ é contínua em a.

Exemplo 1.2.7. Seja $\mathbb{R}$ com a topologia discreta e $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de uma variável. Afirmação: f é contínua.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

De fato, dado $x_0 \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, o intervalo $V = (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$ é um conjunto aberto no contradomínio $\mathbb{R}$. Portanto, $f^{-1}(V)$ é um conjunto aberto no domínio $\mathbb{R}$ pois contém o ponto x_0, que por sua vez está contido em algum elemento base (a, b). Em Análise, definimos a continuidade de f usando uma definição com ε, δ. Entretanto, estas definições são equivalentes. Podemos escolher δ como o menor dos dois números $x_0 - a$ e $b - x_0$. Logo, se $|x - x_0| < \delta$, o ponto x pertence a (a, b), então $f(x) \in V$ e $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Definição 1.2.8**.** Seja $f: X \to Y$ contínua, dizemos que f é um homeomorfismo se f é bijetora e f^{-1} é contínua.

A condição de que f^{-1} seja contínua diz que, para cada conjunto aberto U de X, a imagem inversa de U por $f^{-1}: Y \to X$ é um aberto em Y. Mas a imagem inversa de U por f^{-1} coincide com a imagem de U por f. Então, outra maneira de definirmos um homeomorfismo é dizermos que a aplicação $f: X \to Y$ é bijetiva quando vale que $f(U)$ é aberto se, e somente se, U é aberto.

Esta observação mostra que o homeomorfismo $f: X \to Y$ nos entrega uma correspondência bijetiva não apenas entre X e Y, mas também entre as coleções de abertos entre X e Y. Como resultado, qualquer propriedade de X que é inteiramente expressa em termos da topologia de X (isto é, em termos dos conjuntos abertos de X) produz, através da correspondência f, a propriedade correspondente para o espaço Y. Tal propriedade de X é chamada uma propriedade topológica de X.

Exemplo 1.2.9. Duas bolas abertas quaisquer em $\mathbb{R}^m$ são homeomorfas.

Com efeito, dadas $B(a; r)$ e $B(b; s)$ duas bolas abertas em $\mathbb{R}^m$, consideremos o homeomorfismo $\phi: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, dado por $\phi = T_b \circ H_{\frac{s}{r}} \circ T_{-1}$. Para cada $x \in \mathbb{R}^m$ temos $\phi(x) = b + \frac{s}{r}(x - a)$. Isto mostra que ϕ consiste em primeiro transladar $B(a; r)$ de modo a pôr seu centro na origem. Em seguida multiplicar todos os vetores (com origem 0) por $\frac{s}{r}$ de modo que os vetores de comprimento menor que r passem a ter comprimento menor que s. Finalmente, transladar $B(a; s)$ de maneira a pôr seu centro no ponto b. Logo, o homeomorfismo ϕ transforma $B(a; r)$ em $B(b; s)$ e, por restrição, define um homeomorfismo entre estas bolas.

Definição 1.2.10**.** Seja $f: X \to Y$. f é dito homeomorfismo local se, para todo $x \in X$, existe $U \subset X$ vizinhança de x tal que $f(U) = V$ é aberto em Y e $f_{|U}: U \to Y$ é um homeomorfismo.

Uma função $f: X \to Y$ pode ser contínua sem ser um homeomorfismo. De fato, sejam $X = (-1,0] \cup [1, +\infty]$ e $Y = [0, +\infty]$ subespaços da reta e definamos $f: X \to Y$ por $f(x) = x^2$.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Temos que f é uma aplicação contínua e bijetiva de X sobre Y. A inversa de f é a função $g = f^{-1}$: $Y \to X$, definida por $g(y) = \sqrt{y}$, se $y \geq 1$, e $g(y) = -\sqrt{y}$ se $0 \leq y < 1$. A aplicação g não é contínua no ponto $1 \in Y$. Com efeito, se $0 < \varepsilon < 1$, qualquer intervalo de centro 1 e raio δ em Y contém pontos $y < 1$, os quais são transformados por g em pontos $g(y) = -\sqrt{y}$, que estão a uma distância maior ou igual a 1, logo maior que ε, do ponto $g(1)$.

Definição 1.2.11. Um caminho num espaço topológico X é uma aplicação contínua $f: I \to X$, onde I é o intervalo fechado $[0,1]$. Os pontos $a = f(0)$ e $b = f(1)$ são chamados de extremidades do caminho f, sendo $a = f(0)$ o ponto inicial e $b = f(1)$ é o ponto final. Diz-se também que os pontos a e b são ligados pelo caminho f.

Exemplo 1.2.12. Seja E um espaço vetorial normado. Dados dois pontos $a, b \in E$ temos que $f: I \to X$ definida por $f(t) - (1-t)a + tb$ é um caminho.

De fato, f é contínua e $f(0) = (1-0) + 0b = a$ e $f(1) = (1-1)a + 1b = b$.

Definição 1.2.13. Uma cisão de um espaço topológico X é uma partição de X como união de abertos disjuntos A e B, *i.e.*, $X = A \cup B$ e $A \cap B = \emptyset$. Uma cisão é dita trivial se $A = \emptyset$ e $B = X$ ou $A = X$ e $B = \emptyset$. Um espaço topológico é dito conexo se admite apenas a cisão trivial. Caso contrário, dizemos que ele é desconexo.

Exemplo 1.2.14. Todo conjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ admite pelo menos a cisão trivial $X = X \cup \emptyset$. Temos que $\mathbb{R} - \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ é uma cisão não trivial, logo, $\mathbb{R} - \{0\}$ é um conjunto desconexo. Temos também que $\emptyset$ e x são conjuntos conexos.

Definição 1.2.15**.** Um espaço topológico X é dito conexo por caminhos quando para quaisquer $a, b \in X$, com $a, b \neq 0$, existe um caminho ligando-os.

Exemplo 1.2.16. A esfera $S^{n-1} = x \in R^n; |x| = 1 \subset R^n$ é conexa por caminhos. Com efeito, dados $a, b \in S^{n-1}$, se a e b não são antípodas, isto é, se $b \neq -a$, então f: $[0, 1] \to S^{n-1}$, definida por

$$f(t) = \frac{(1-t)a + tb}{|(1 \ -t)a + tb|}$$

é contínua (pois seu denominador nunca se anula), com $f(0) = a$ e $f(1) = b$. Se, porém, a e b são antípodas, então qualquer ponto $c \in S^{\,n-1} - \{a,\ b\}$ não é o antípoda de a nem de b. Logo, existem

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

caminhos $f, g: I \to S^{n-1}$, com $f(0) = a$, $f(1) = c$, $g(0) = c$ e $g(1) = b$. Assim, podemos definir um novo caminho (caminho justaposto) da seguinte forma: $h = f \vee g: I \to S^{n-1}$ tal que

$$(f \vee g)(t) = f(t), \text{ se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2};$$

$$(f \vee g)(2t-1) = g(2t-1) \text{ se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

Tem-se então $h(0) = a$ e $h(1) = b$.

Definição 1.2.17**.** Sejam X um espaço topológico e $x \in X$, denotamos por C_x a união de todos os subconjuntos conexos de X que contêm x. C_x é chamado de componente conexa de x e é o maior conexo que contém x.

Exemplo 1.2.18. Se $X \subset \mathbb{Q}$, então a componente conexa de qualquer ponto $x \in X$ é $\{x\}$, pois qualquer subconjunto conexo $X \subset \mathbb{Q}$ não pode ter mais de um ponto. De fato, se existirem $a, b \in X$ com $a < b$, escolheremos um número irracional ξ no intervalo (a, b), poremos $A = (-\infty, \xi) \cap X$ e $B = (\xi, +\infty) \cap X$ e obteremos a cisão $X = A \cup B$, que não é trivial pois $a \in A$ e $b \in B$.

1.3 VARIEDADES TOPOLÓGICAS

Uma variedade topológica é um espaço topológico com três propriedades especiais que expressam a noção de ser localmente como o espaço euclidiano. Essas propriedades são compartilhadas com espaços euclidianos e também por objetos geométricos familiares que olhados localmente são como o espaço euclidiano, como por exemplo as curvas e superfícies.

Definição 1.3.1**.** Seja M um espaço topológico. Dizemos que M é uma variedade topológica de dimensão n se satisfaz as seguintes propriedades:

1. M é um espaço de Hausdorff: para todo par de pontos distintos $p, q \in M$ existem subconjuntos abertos disjuntos $U, V \in M$ tal que $p \in U$ e $q \in V$;
2. M é segundo enumerável: existe uma base enumerável para a topologia de M;
3. M é localmente euclidiano de dimensão n: todo ponto de M possui uma vizinhança que é homeomorfa a um subconjunto de $\mathbb{R}^n$.

Exemplo 1.3.2. O exemplo mais básico de uma n-variedade topológica é o espaço $\mathbb{R}^n$. Este espaço é Hausdorff, pois é um espaço métrico, e segundo enumerável, pois o conjunto de todas as bolas abertas com centro e raio racional é uma base enumerável.

A propriedade localmente euclidiana significa que para cada $p \in M$ temos:

i) Um conjunto aberto $U \subset M$ contendo p;

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

ii) Um conjunto aberto $\overline{U} \subset \mathbb{R}^n$;

iii) Um homeomorfismo $\phi: U \to \overline{U}$.

Definição 1.3.3. Seja M uma n-variedade topológica. Uma mudança de coordenadas em M é um par $(U,\ \phi)$ com U um subconjunto aberto de M e $\phi: U \to \overline{U}$ um homeomorfismo de U sobre um subconjunto aberto $\overline{U} = \phi(U) \subset \mathbb{R}^n$.

A definição de uma variedade topológica implica que cada ponto $p \in M$ está contido no domínio de algum par de mudança de coordenadas (U, ϕ).

Exemplo 1.3.4. Seja a n-esfera $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; ||x|| = 1\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Vamos mostrar que S^n é uma n-variedade topológica. Temos que esse conjunto é Hausdorff e segundo enumerável, já que é subconjunto de $\mathbb{R}^{n+1}$. Para mostrar que é localmente euclidiano, seja, para cada $i = 1,$ $\dots\ , n+1$ indexado, U_i^+ um subconjunto de $\mathbb{R}^{n-1}$ com i-ésima coordenada positiva:

$$U_i^+ = \{(x_1,\ \cdots, x_{n+1}) \in S^n; x_i > 0\}.$$

Similarmente, temos:

$$U_i^- = \{(x_1,\ \cdots\ ,\ x_{n+1}) \in S^n; x_i < 0\}.$$

Para cada i, definamos as aplicações $\phi_i^\pm: U_i^\pm \to \mathbb{R}^n$ dadas por $\phi_i^\pm(x_1,\ \cdots\ ,\ x_{n+1}) = (x_1,\ \cdots\ ,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_{n+1})$. Cada $\phi_i^\pm$ é uma aplicação contínua que quando restrita a S^n é uma aplicação linear em $\mathbb{R}^{n+1}$. Este é um homeomorfismo sobre sua imagem, a bola unitária $B^n \subset \mathbb{R}^n$, pois sua imagem inversa é contínua e dada por:

$$\left(\phi_i^\pm\right)^{-1}(u_1,\ \cdots\ ,\ u_n) = \left(u_1,\ \cdots\ ,\ u_{i-1}, \pm\sqrt{1-|u|^2}, u_i,\ \cdots\ , u_n\right).$$

Como todo ponto em S^n está no domínio de alguma $(2n+2)$-mudança de coordenadas, então S^n é localmente euclidiana de dimensão n. Portanto, S^n é uma n-variedade topológica.

1.4 ESPAÇO PROJETIVO REAL

Definição 1.4.1. Seja $S^{n-1} = \left\{x \in \mathbb{R}^n; \left||x|\right| = 1\right\} \subset \mathbb{R}^n$ com a topologia induzida de $\mathbb{R}^n$. O Espaço Projetivo Real $\mathbb{P}^{n-1}$ é a variedade resultante de S^{n-1} quando identificados os pontos antípodas de S^{n-1}, isto é, dados $u, v \in S^{n-1}$, dizemos que u e v são equivalentes (notação: $u \sim v$) se existe $\lambda \in \mathbb{R}$ não nulo tal que $v = \lambda u$.

Como $u, v \in S^{n-1}$, então $||u|| = ||v|| = 1$ e isso implica que $|\lambda| = 1$. De fato, $u, v \in S^{n-1}$ e $u \sim v$ implicam que existe $\lambda \in \mathbb{R}$ não nulo tal que $v = \lambda u$. Daí,

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

$$||v|| = ||\lambda u|| \Rightarrow ||v|| = |\lambda|||u|| \Rightarrow |\lambda| = 1,$$

onde $||v|| = ||u|| = 1$.

Portanto, $u = v$ ou $v = -u$. Quando $v = -u$, dizemos que u e v são antípodas.

Proposição 1.4.2. A relação $\sim$ é de equivalência.

Prova: Sejam $u, v, w \in S^{n+1}$. Logo:

1. $u \sim u, \forall\, u \in S^{n-1} \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$, tal que $u = \lambda u$.

Assim, $\sim$ é uma relação reflexiva.

2. $u \sim v \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ \lambda \neq 0$ tal que $v = \lambda u$

$\Leftrightarrow u = \frac{1}{\lambda} v$, de onde definimos $\lambda_1 = \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \exists \lambda_1 \in \mathbb{R},\ \lambda_1 \neq 0$ tal que $u = \lambda_1 v$

$\Leftrightarrow v \sim u$.

Portanto, $\sim$ é uma relação simétrica.

3. $u \sim v$ e $v \sim w \Leftrightarrow \exists \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$, com $\lambda_2, \lambda_3 \neq 0$ tal que $v = \lambda_2 u$ e $w = \lambda_3 v$

$\Leftrightarrow w = \lambda_3(\lambda_2 u)$

$\Leftrightarrow w = (\lambda_2\lambda_3)u$, onde definimos $\lambda_2\lambda_3 = \lambda_4 \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \exists \lambda_4 \in \mathbb{R},\ \lambda_4 \neq 0$ tal que $w = \lambda_4 u$

$\Leftrightarrow u \sim w$.

Assim, $\sim$ é uma relação transitiva.

O espaço quociente $S^{n-1}/\sim = \mathbb{P}^{n-1}$ é o espaço projetivo de dimensão $n-1$. Note que $\mathbb{P}^{n-1} = \{\overline{u}\,; u \in S^{n-1}\}$ e que $\overline{u} = \{u, -u\}$.

Exemplo 1.4.3. Vamos mostrar que $\mathbb{P}^n$ é uma n-variedade topológica. Podemos colocar em $\mathbb{P}^n$ uma estrutura de topologia quociente determinada naturalmente pela aplicação $\pi: \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbb{P}^n$ enviando cada ponto $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ para a reta que passa por x e 0. Para cada ponto $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, seja $[x] = \pi(x)$ a classe de equivalência de x em $\mathbb{P}^n$.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Para cada $i = 1, \ldots , n + 1$, seja $\overline{U_i} \subset \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ tal que $x_i \neq 0$ e $U_i = \pi(\overline{U_i}) \subset \mathbb{P}^n$. Como $\overline{U_i}$ é um conjunto aberto saturado (significando que contém a imagem inversa $\pi^{-1}(\pi(p))$ para cada $p \in \overline{U_i}$), temos que U_i aberto e que $\pi: \overline{U_i} \to U_i$ é uma aplicação quociente. Defina uma aplicação $\phi_i: U_i \to \mathbb{R}^n$ dada por $\phi_i[x_1, \cdots , x_{n+1}] = \left(\frac{x_1}{x_i}, \cdots , \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \cdots , \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$.

Esta aplicação está bem definida pois seu valor é inalterado pela multiplicação de x por uma constante não nula e é contínua pois $\phi_i \circ \pi$ é contínua. De fato, ϕ_i é um homeomorfismo, pois a inversa é dada por $\phi_i^{-1}(u_1, \cdots , u_n) = [u_1, \cdots , u_{i-1}, 1, u_i, \cdots , u_n]$. Geometricamente, se identificarmos $\mathbb{R}^n$ com o subespaço onde $x_i = 1$, então $\phi_i[x]$ pode ser interpretado como o ponto onde a reta $[x]$ intersecta este espaço, pois os conjuntos U_i cobrem $\mathbb{R}^n$, logo $\mathbb{P}^n$ é localmente euclidiano.

Agora, sejam $[x]$ e $[y]$ pontos distintos de $\mathbb{P}^n$, isto é, subespaços distintos unidimensionais de $\mathbb{R}^{n+1}$, e que são gerados pelos vetores unitários x e y, respectivamente. Como S^n é Hausdorff, sejam $\dot{U} = U \cup \overline{U}$ e $\dot{V} = V \cup \overline{V}$, e defina $\phi: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to S^n$ por $p \mapsto \frac{p}{||p||}$.

Temos que $U = \pi\left(\phi^{-1}(\dot{U})\right)$ e $V = \pi\left(\phi^{-1}(\dot{V})\right)$ são disjuntos e contêm $[x]$ e $[y]$, respectivamente. Temos também que U e V são abertos. Assim, $[x] \in U$ e $[y] \in V$. Seja $[p] \in U \cap V$. Então $[p] = \pi(u) = \pi(v)$ para algum $u \in \phi^{-1}(\dot{U})$ e $v \in \phi^{-1}(\dot{V})$. Então $u = \lambda v$ para algum $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Logo, $\phi(u) = \pm\phi(v)$. Mas isto implica que $\phi(u) \in \dot{U} \cap \dot{V}$, uma contradição. Portanto, $\mathbb{P}^n$ é Hausdorff.

Agora, seja $\mathcal{B}$ uma base enumerável para $\mathbb{R}^n$. Temos que $\pi(\mathcal{B}) = \{\pi(B) \in \mathcal{B}\}$ é uma base para $\mathbb{P}^n$. Definamos $f_t: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dado por $p \mapsto tp$.

Temos que f_t é contínua e que possui inversa $f_{\frac{1}{t}}: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ dada por $p \mapsto \frac{1}{t}p$ é contínua. Logo, se U é aberto, então $f_t(U)$ é um conjunto. Temos que $\pi^{-1}(\pi(U)) = \cup_{t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} f_t(U)$ para algum conjunto aberto $U \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Seja $p \in \pi^{-1}(\pi(U))$. Então $\pi(p) \in \pi(U)$, implicando que existe $u \in U$ que gera o mesmo espaço vetorial que p. Assim, $p = \lambda u$ para algum elemento não nulo λ , e, portanto, $p \in \cup_{t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} f_t(U)$. Por outro lado, suponha $p \in \cup_{t \in \mathbb{R}\setminus\{0\}} f_t(U)$. Então $p = f_t(u) = \lambda u$, para algum $u \in U$ e algum elemento não nulo λ. Logo, $\pi(p) = \pi(\lambda u) = \pi(u)$, para algum $p \in \pi^{-1}(\pi(u))$. Agora podemos provar que $\mathbb{P}^n$ é segundo enumerável, que é equivalente a mostrar que $\pi(\mathcal{B})$ é uma base. Seja $[p] \in \pi(B_1) \cap \pi(B_2)$ para dois elementos base $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Então $p \in \pi^{-1}(\pi(B_1)) \cap \pi^{-1}(\pi(B_2))$, que é aberto. Como este conjunto não é vazio, existe um elemento base B_3 contido em $\pi^{-1}(\pi(B_1)) \cap \pi^{-1}(\pi(B_2))$. Então $\pi(B_3) \subseteq \pi^{-1}(\pi(B_1)) \cap \pi^{-1}(\pi(B_2))$, logo $\pi(\mathcal{B})$ é uma base. Portanto, $\mathbb{P}^n$é uma n-variedade.

2 RESULTADOS

Agora falaremos de técnicas de Topologia Algébrica: Homologia e Cohomologia com coeficientes em $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$.

2.1 HOMOLOGIA E COHOMOLOGIA COM COEFICIENTES EM $\mathbb{F}_2$.

Definição 2.1.1 Seja X um conjunto não vazio. Seja $< X >$ o conjunto das combinações lineares (formais) com coeficientes em $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$:

$$< X > = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_i ; \; n \in \mathbb{N}, x_i \in X, a_i \in \mathbb{F}_2 \right\}.$$

Devemos ver a notação $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_i$ de modo formal, e não como uma soma. Se $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, x_i$ e $y = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \, y_j$ pertencem a $< X >$, definimos a soma $x + y = y + x = \sum_{k=1}^{m+n} y_k \, z_k$, onde $y_k = \alpha_k$ e $z_k = x_k$, se $1 \leq k \leq n$, $y_k = \beta_{k-n}$ e $z_k = y_{k-n}$ se $n + 1 \leq k \leq n + m$. Com essa adição, $< X >$ é um grupo abeliano, chamado grupo abeliano livre gerado por X.

Definição 2.1.2. Seja X um espaço topológico. Dados $x, y \in X$, escrevemos $x \sim y$ e dizemos que x e y são homólogos se existe uma função contínua

$$\gamma : [0, 1] \to X$$

tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.

Lema 2.1.3. A relação $\sim$ como acima é uma relação de equivalência.

Prova: De fato, temos que:

1. A função $\gamma: [0,1] \to X$ dada por $\gamma(t) = x, \forall x \in [0,1]$ é contínua e $\gamma(0) = \gamma(1) = x$. Logo, $x \sim x$ é uma relação reflexiva.
2. Se $x \sim y$, então existe função contínua $\gamma: [0, 1] \to X$ tal que γ (0) = x e γ (1) = y. Considere $\gamma_1: [0,1] \to X$, dada por $\gamma_1 = \gamma(1 - t)$, γ_1 é contínua. Temos que $\gamma_1(0) = \gamma(1) = y$ e $\gamma_1(1) = \gamma(0) = x$. Daí, $y \sim x$ é uma relação simétrica.
3. Suponha $x \sim y$ e $y \sim z$. Logo,

$$x \sim y \Rightarrow \exists \gamma_1 : [0,1] \to X, \text{ contínua, tal que } \gamma_1(0) = x \text{ e } \gamma_1(1) = y.$$

$$y \sim z \Rightarrow \exists \gamma_2 : [0,1] \to X, \text{ contínua, tal que } \gamma_2(0) = y \text{ e } \gamma_2(1) = z.$$

Seja $\lambda : [0,1] \to X$ contínua, dada por

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t), \, se \, 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1), \, se \, \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases},$$

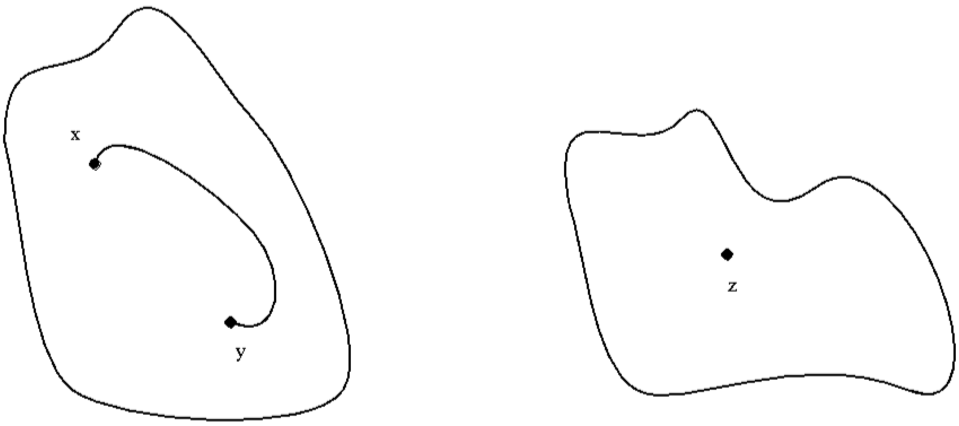
de onde obtemos que

$$\gamma(0) = \gamma_1(2 \cdot 0) = \gamma_1(0) = x;$$

$$\gamma(1) = \gamma_2(2 \cdot 1 - 1) = \gamma_2(1) = z.$$

Assim, $x \sim z$ é uma relação transitiva.

Sejam $[x] = \{y \in X; y \sim x\}$ e $S_0X = \{[x]; x \in X\}$. Temos que $[x]$ é uma classe de equivalência, chamada classe de homologia de dimensão zero. O grupo de homologia de dimensão zero $H_0(X) = H_0(X, \mathbb{F}_2) = < S_0X >$ é o grupo abeliano livre gerado por S_0X. O grupo $H_0(X)$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{F}_2$ e $dim_{\mathbb{F}_2} H_0(X) = n$ é o número de componentes conexas por caminhos de X.



Fonte: Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)

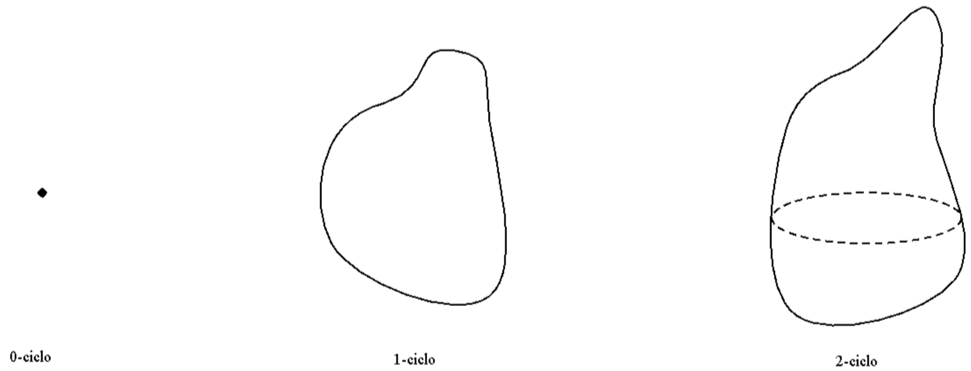
$$x \sim y, \; X = [x] \cup [z]$$

$$x \nsim z, \; S_0X = \{[x], [z]\}$$

X tem dois “pedaços” (componentes conexas por caminhos).

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

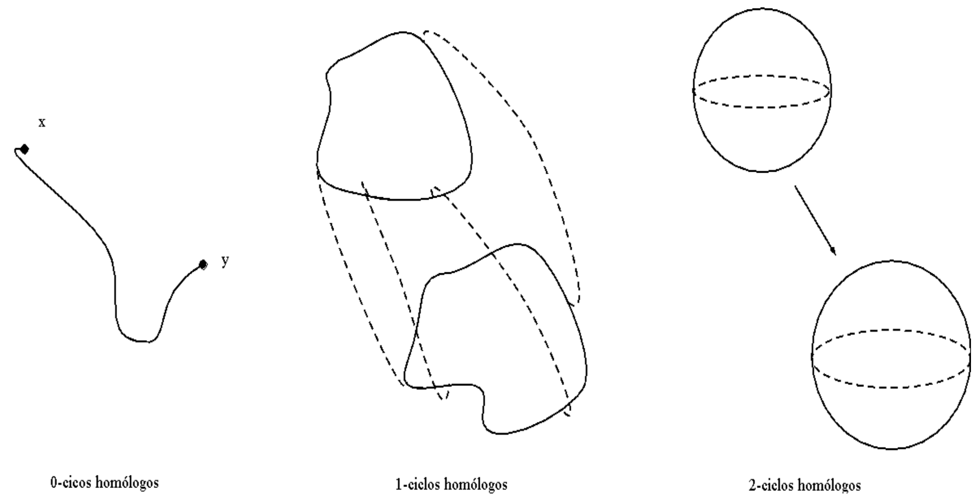
Se $q \geq 1$, o grupo de homologia de dimensão q dado por $H_q(X) = H_q(X, \mathbb{F}_2)$ é construído a partir de estruturas q-dimensionais, ao invés de pontos (que têm dimensão zero). Essas estruturas são chamadas de q-ciclos. Por exemplo, 0-ciclos são pontos e 1-ciclos são curvas fechadas em X.



Fonte: Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)

Denotamos por S_qX o conjunto das classes de homologia de q-ciclos em X. Dois q-ciclos x e y são chamados homólogos (notação $x \sim y$) se for possível "ligar" x a y por uma deformação em X. Temos

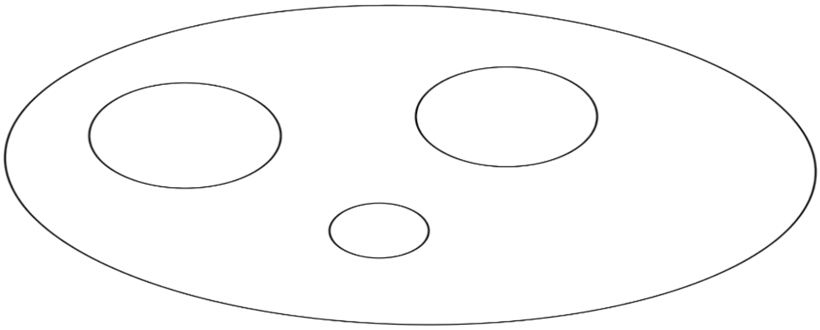
$$H_q(X) = H_q(X, \mathbb{F}_2) = < S_qX >.$$



Fonte: Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)

Exemplo 2.1.4. Se X é a figura abaixo, então $H_0(X) \cong \mathbb{F}_2$ e $H_1(X) \cong \mathbb{F}_2^3$ ($H_1(X)$ tem dimensão 3 como $\mathbb{F}_2$-espaço vetorial, pois X tem 3 "buracos").

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218



Fonte: Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)

Para a esfera e o espaço projetivo real, temos:

$$H_q(S^n) \cong \mathbb{F}_2 \text{ , se } q = 0 \text{ ou } q = n,$$

$$0, \text{ se } q \neq \{0, n\};$$

$$H_2(\mathbb{P}^n) \cong \mathbb{F}_2, \text{ se } 0 \leq q \leq n,$$

$$0, \text{ caso contrário.}$$

Se X e Y são espaços topológicos, uma função contínua $f: X \to Y$ induz um homomorfismo de grupos $f_q: H_q(X) \to H_q(Y)$, para cada $q \geq 0$. Em geral, quando não for importante explicitar a dimensão q, escrevemos f_* em vez de f_q.

Exemplo 2.1.5. Se $q = 0$ e $x \in X$, então $f_0: H_0(X) \to H_0(Y)$ leva a classe de homologia $[x]$ de x na classe de homologia $[f(x)]$. Se γ é um caminho fechado em X, então $f \circ \gamma$ é um caminho fechado em Y e, para $q = 1$, temos $f_1([\gamma]) = [f \circ \gamma]$.

Se $f: X \to Y$ e $g: Y \to Z$ são funções contínuas, então $g \circ f$ é uma função contínua e $(g \circ f)_*: H_q(X) \to H_q(Z)$ é dada por $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$. Esses fatos podem ser assumidos dizendo-se que o par (H_q, f_*) é um funtor covariante.

O q-ésimo grupo de cohomologia $H_q(X)$ é dado por

$$H_q(X) = Hom(H_q(X), \mathbb{F}_2) = \{u: H_q(X) \to \mathbb{F}_2; u \text{ funcional linear}\}.$$

Se $x \in H_q(X)$ e $u \in H^q(X)$, o valor de u em x é denotado por $< u, x > \in \mathbb{F}_2$, isto é, $< u, x >= u(x)$.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Dada uma função contínua $f: X \to Y$, ao homomorfismo (de grupos) $f_*: H_q(X) \to H_q(Y)$ corresponde o homomorfismo (de grupos) $f^*: H^q(Y) \to H^q(X)$ dado por $f^*(u) = u \circ f_*$ (observe a inversão de setas).

$$H_q(X) \xrightarrow{f^*(u)} \mathbb{F}_2$$

$$f_* \downarrow \qquad \nearrow u$$

$$H_q(Y);$$

$$< f^*(u), x >=< u, f_*(x) >.$$

Na transformação da f para a f^*, as setas são invertidas e $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. De fato,

$$< (g \circ f)^*(u), x > = < u, (g \circ f)_*(x) >=$$

$$= < u, (g_* \circ f_*)(x) > = < u, g_*\big(f_*(x)\big) > =$$

$$= < g^*(u), f^*(x) > = < f^*\big(g^*(u)\big), x > =$$

$$= < (f^* \circ g^*)(u), x >.$$

Para todo $u \in H^q(X)$ e para todo $x \in H_q(X)$, temos que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$.

Sobre grupos de cohomologia, podemos definir uma multiplicação:

$$\cup: H^p(X) \times H^q(X) \to H^{p+q}(X);$$

$$(u, v) \mapsto u \cdot v,$$

chamada "*cup product*". Com essa operação, a soma direta $H^*(X) = \bigoplus_{p\geq 0} H^p(X)$ ganha estrutura de anel associativo e comutativo. Chamamos $H^*(X)$ de $\mathbb{F}_2$-álgebra graduada.

É possível estender o homomorfismo $f^*: H^p(Y) \to H^p(X)$ para a $\mathbb{F}_2$-álgebra graduada $\bigoplus_{p \geq 0} H^p(X)$, de modo a obtermos um homomorfismo

$$f^*: \underbrace{\bigoplus_{p \geq 0} H^p(Y)}_{H^*(Y)} \to \underbrace{\bigoplus_{p \geq 0} H^p(X)}_{H^*(X)}$$

que é compatível com a multiplicação:

$$f^*(u \cdot v) = f^*(u) \cdot f^*(v),$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

logo, é um homomorfismo de anéis.

O número (natural ou ∞) $b_p(X) \coloneqq dim_{\mathbb{F}_2} H^p(X)$ é chamado p-ésimo número de Betti de X. Se $b_p(X) < \infty$ (o que sempre será verdade no nosso caso), então $b_p(X) = dim_{\mathbb{F}_2} H^p(X)$.

Teorema 2.1.5. (Teorema da dualidade de Poincaré - 1895) Se X é uma variedade de dimensão n, então $b_p(X) = b_{n-p}(X)$.

A igualdade $b_p(X) = b_{n-p}(X)$ significa que existe um isomorfismo

$$\pi: H_{n-p}(X) \to H^p(X),$$

chamado Isomorfismo de Poincaré.

Este isomorfismo torna possível uma interpretação geométrica do produto no anel de cohomologia: se M e N são subvariedades de X de codimensão p e q que são transversais, isto é, $M \cap N$ é uma subvariedade de codimensão $p + q$. Então:

$$\pi([M]) \cdot \pi([N]) = \pi([M \cap N]).$$

Assim, o produto em $H^*(X)$ corresponde à interseção de subvariedades em X.

Pelo isomorfismo de Poincaré, a soma direta de grupos de homologia $H_*(X) = \bigoplus_{p \geq 0} H^p(X)$ também é um anel, com a multiplicação dada como uma função

$$H_{n-p}(X) \times H_{n-q}(X) \to H_{n-(p+q)}(X).$$

Se X é conexo, então $H_0(X) \cong \mathbb{F}_2$. Neste caso, para $x \in H_{n-p}(X)$, $y \in H_q(X) = H_{n-(p+n-p)}(X)$, o produto $x \cdot y$ pertence a $H_{n-(p+n-p)}(X) = H_0(X) \cong \mathbb{F}_2$. Temos, então, $x \cdot y = < \pi(x), y >$.

Sabemos que:

$$H_q(\mathbb{P}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2, se\, 0 \leq q \leq n \\ 0, \; caso\ contrário \end{cases}$$

Então, pelo Isomorfismo de Poincaré:

$$\mathbb{F}_2 \cong H_{\underbrace{n-k}_{q}}(\mathbb{P}^n) \cong H^k(\mathbb{P}^n).$$

Logo, $0 \leq q \leq n \Leftrightarrow 0 \leq n - k \leq n \Leftrightarrow -n \leq -k \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq k \leq n$. Assim,

$$H^k(\mathbb{P}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2, \; se\ 0 \leq k \leq n \\ 0, caso\ contrário \end{cases}$$

é o grupo de cohomologia do plano projetivo.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Vamos, agora, determinar o anel de cohomologia de um plano projetivo $\mathbb{P}^{n-1}$.

Pela Dualidade de Poincaré sabemos que:

$$H_q(\mathbb{P}^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{F}_2, \ se \ 0 \leq q \leq n-1 \\ 0, \ caso \ contrário \end{cases}.$$

Assim, $\bigoplus_{k=0}^{n-1} H^p(\mathbb{P}^{n-1}) = H^*(\mathbb{P}^{n-1}) \cong \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{F}_2$. Os elementos de $\bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{F}_2$ são ênulas $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, 0, 0, \dots)$ com soma e produto por escalar coordenada a coordenada:

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \dots, 0, \dots) + (b_0, b_1, \dots, b_{n-1}, \dots, 0, \dots)$$
$$= (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \dots, a_{n-1} + b_{n-1}, \dots, 0 + 0, \dots);$$

$$\alpha(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, \dots, 0, \dots) = (\alpha a_0, \alpha a_1, \dots, \alpha a_{n-1}, \dots, \alpha 0, \dots).$$

A multiplicação em $H^*(\mathbb{P}^{n-1}) \cong \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{F}_2$ vem do *"cup product"*. Este produto é graduado, isto é, leva um par de $H^p(\mathbb{P}^{n-1}) \times H^q(\mathbb{P}^{n-1})$ em um elemento de $H^{p+q}(\mathbb{P}^{n-1})$. Isso dá à soma direta a estrutura de álgebra graduada. Como

$$\bigoplus_{k\geq 0} \mathbb{F}_2 = \mathbb{F}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}_2 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots,$$

onde em $\mathbb{F}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{F}_2$ temos $0 \leq k \leq n-1$ e em $0 \oplus 0 \ \cdots \ \oplus \cdots$ temos $k \geq n$. Logo,

$$H^*(\mathbb{P}^{n-1}) \cong \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{F}_2 \cong \mathbb{F}_2[t]/(t^n).$$

Temos também que

$$H^*(\mathbb{P}^{n-1} \times \mathbb{P}^{n-1}) \cong \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{F}_2 \otimes \bigoplus_{k=0}^{n-1} \mathbb{F}_2 \cong \mathbb{F}_2[t,u]/(t^n, u^n).$$

3 CONSIDERAÇÕES

Ao longo do desenvolvimento desse trabalho foi possível compreender o conceito de homologia e cohomologia no corpo $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$, com conceitos fundamentais e exemplos para o melhor entendimento. Para tanto utilizamos um importante resultado, o Teorema de dualidade de Poincaré, junto com o conceito do número de Betti para encontrarmos os grupos de homologia e cohomologia do plano projetivo.

REFERÊNCIAS

BORGES, H.; TENGAN, E. **Álgebra comutativa em quatro movimentos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2015.

HATCHER, A. **Algebraic topology**, 2001. Disponível em: AT.dvi (cornell.edu). Acesso em: 24 abr. 2023.

HUNGERFORD, T. W. **Graduate texts in mathematics, Algebra**. 8. ed. New York: Springer, 2003.

LANG, S. **Graduate texts in mathematics, Algebra**. 3. ed. New York: Springer, 2002.

LEE, J. M. **Graduate texts in mathematics, Introduction to Smooth Manifolds**. 2. ed. New York: Springer, 2012.

LIMA, E. L. **Curso de análise**. 11. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. vol 2.

LIMA, E. L. **Elementos de topologia geral**. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2009.

LIMA, E. L. **Homologia básica**. 2. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2012.