RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

MODELO PARA AVALANCHE SOB ENFOQUE DA TEORIA DA PERCOLAÇÃO

AVALANCHE MODEL UNDER THE FOCUS OF PERCOLATION THEORY

EL MODELO DE AVALANCHAS BAJO EL FOCO DE LA TEORÍA DE LA PERCOLACIÓN

Raimundo Souza[1], Heliton Tavares[2], André Luiz Amarante Mesquita[3]

e4114430
https://doi.org/10.47820/recima21.v4i11.4430

PUBLICADO: 11/2023

RESUMO
Avalanches são escoamentos de sólidos particulados que ao serem observados grão em grão podem ser considerados como uma rede de percolação. Considerar-se-á esta hipótese, no sentido de descobrir se este tratamento é possível e quais suas vantagens. O trabalho de Hinrichsen, mostra que é possível considerar avalanches como eventos de percolação, entretanto, não há uma clara distinção sobre que modelo percolativo estes eventos descrevem, se homogêneo ou não homogêneo. Este trabalho tem o intuito de mostrar que esses eventos de avalanche podem ser classificados como caso de percolação homogênea, pois, em Hinrichsen, as simulações apresentam certas características de percolação Homogênea. Fundamentados na hipótese que as avalanches podem ser tratadas como rede de percolação, traz-se a luz, dados qualitativos desta hipótese como o comportamento característico das avalanches e a presença da transição de fase. Em relação aos aspectos quantitativos, é mostrado o desempenho do modelo através da mensuração e análise dos eventos simulados. E por fim, introduz-se um modelo de equação capaz de prever a probabilidade de uma avalanche se estender até certo ponto.

PALAVRAS-CHAVE: Avalanche. Percolação. Percolação homogênea.

ABSTRACT
Avalanches are specialized solids flows and are observed as a percolation network. This hypothesis will be considered, no sense of finding out if this treatment is possible and what are its advantages. The work of Hinrichsen, which is not a clear distinction on the percolative model these events describe, whether homogeneous or not homogeneous. The work aims to show that these avalanche events can be classified as a case of homogeneous percolation, because in Hinrichsen, as a simulation of certain Homogeneous percolation characteristics. Based on the hypothesis that as avalanches can be treated as a percolation network, we bring light, qualitative data of this hypothesis as the characteristic behavior of avalanches and a presence of phase transition. In relation to the quantitative, presentation and performance of the model through the measurement and analysis of simulated events. And finally, an equation model is introduced that is able to predict a probability that an avalanche will extend to a certain extent.

KEYWORDS: *Avalanche. Percolation. Homogeneous percolation.*

[1] Universidade Federal do Pará - UFPA.
[2] Graduação em Estatística pela Universidade de São Paulo, mestrado em Estatística pela Universidade de São Paulo, doutorado em Estatística pela Universidade de São Paulo e Pós-Doutorado na University of Florida. Professor Titular da Universidade Federal do Pará. Diretor do DERCA/CIAC e Diretor de Planejamento. Coordenador-Geral de Instrumentos e Medidas e Diretor de Avaliação da Educação Básica. Avaliador de Cursos e de Instituição da Educação Superior. Participa da Comissão de Assessoramento do INEP. Compõe a coordenação do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo e Consultor para implantação do Sistema Paraense de Avaliação Educacional junto à Seduc/BID. Coordenador do Laboratório de Avaliação e Medidas (LAM/UFPA). É membro Titular da Academia Paraense de Ciências.
[3] Graduação em Engenharia Mecânica pela Universidade Federal do Pará, mestrado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica e doutorado em Engenharia Mecânica - Institut National Polytechnique de Grenoble. Professor titular da Universidade Federal do Pará e Diretor do TECNOLAGO - Parque de Tecnologia do Lago de Tucuruí.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

RESUMEN
Las avalanchas son flujos de sólidos particulados que, cuando se observan grano a grano, pueden considerarse como una red de percolación. Esta hipótesis será considerada con el fin de averiguar si este tratamiento es posible y cuáles son sus ventajas. El trabajo de Hinrichsen muestra que es posible considerar las avalanchas como eventos de percolación, pero no hay una distinción clara sobre qué modelo de percolación describen estos eventos, si son homogéneos o no homogéneos. Este trabajo tiene como objetivo mostrar que estos eventos de aludes pueden clasificarse como un caso de percolación homogénea, ya que, en Hinrichsen, las simulaciones presentan ciertas características de percolación homogénea. Partiendo de la hipótesis de que las avalanchas pueden ser tratadas como una red de percolación, se sacan a la luz datos cualitativos de esta hipótesis, como el comportamiento característico de las avalanchas y la presencia de transición de fase. En cuanto a los aspectos cuantitativos, se muestra el desempeño del modelo a través de la medición y análisis de los eventos simulados. Y, por último, se introduce un modelo de ecuaciones capaz de predecir la probabilidad de que una avalancha se extienda hasta un punto determinado.

PALABRAS CLAVE: *Avalancha. Percolación. Percolación homogénea.*

INTRODUÇÃO

O ser humano sempre teve de lidar com a matéria no estado granular, bastante frequente na natureza, razão pela qual houve grande desenvolvimento na compreensão dos materiais granulares do ponto de vista prático, no passado. No entanto, há forte necessidade de se saber mais sobre os aspectos fundamentais e sobre as origens de muitas das propriedades desses materiais. O interesse por parte dos físicos nesses sistemas se deve à riqueza de fenômenos exibidos como transições de fase, formação de padrões induzidos por vibração e formação de aglomerados em fases granulares, à similaridade com outros sistemas bastante relevantes atualmente, como por exemplo, tráfego de veículos em vias urbanas [22].

Avalanche é a precipitação de um material sobre um leito íngreme, geralmente pedras em encostas, mas pode ser composta de qualquer material particulado que seja considerado como escoamento de sólidos. Em geologia, avalanche é definida como “movimentos de massa” que ocorrem sempre devido à instabilidade do material (solo, neve, gelo, rocha) ocasionada pela atuação da força da gravidade aliada a algumas características determinantes como a inclinação do terreno, presença ou não de vegetação, e principalmente, a presença de água. Há outros fatores que também influenciam nesse movimento, como a ocorrência de erosão, sismicidade e a degradação das raízes da vegetação. Algumas avalanches são lentas, quase imperceptíveis, enquanto outras são rápidas e atingem grandes velocidades.

Em 1987, Bak e colaboradores propuseram um autômato celular que imitava o comportamento de uma avalanche em pilha de areia [1]. No artigo, eles procuravam explicar o ruído 1/f observado no espectro de potência para baixas frequências(f) em vários fenômenos. Eles relacionam esse ruído à existência de um estado crítico em sistemas dinâmicos. A transição para esse estado é semelhante a uma transição de segunda ordem com a diferença de que não existe um parâmetro de controle que a caracterize[2]. O sistema evolui naturalmente para esse estado, que foi então denominado estado crítico auto-organizado.

Temos vários exemplos de que este comportamento coletivo acontece em amplitudes e frequências diferentes. É interessante observar que avalanches, desmoronamentos, terremotos, incêndios naturais em florestas, tempestades solares, microfraturas em estruturas metálicas e cerâmicas, extinção de espécies biológicas, ganhos e perdas em economia, congestionamento em trânsito etc., seguem equações matemáticas, dentro de algumas simplificações. Isto é, mesmo sendo fenômenos tão complicados e distintos, uma análise matemática mostra e até prevê seu comportamento. Físicos e engenheiros dizem que esses sistemas no limiar de avalanche, estão em limites críticos entre estabilidade e instabilidade, e que os elementos dos sistemas tendem a se auto-organizar.

Por outro lado, Percolação é provavelmente o modelo mais simples que exibe uma falta de equilíbrio, transição de fase entre uma fase ativa e uma inativa. Na fase inativa o sistema é apenas um absorvedor, estado de onde ele não pode escapar. O principal interesse em Percolação é sua universal ligação associada ao comportamento crítico. Desta maneira podemos associar os eventos de avalanche com os eventos de percolação.

Em 1999, os cientistas Douady e Daerr trabalharam num artigo sobre um experimento recriando avalanches de areia, então publicaram seus resultados [11]. Um ano depois, Hinrichsen [17] e mais outros colegas publicaram um artigo que usava os dados de Douady e Daerr, porém o intuito desse novo artigo não era apenas comparar dados de avalanche entre modelos reais e modelos simulados. Hinrichsen percebeu que as avalanches tinham um comportamento percolativo direcionado e dentro deste havia uma distinção de classes percolativas. Um fato interessante desse artigo de Hinrichsen é que ele mostra que uma avalanche pode ser tratada como caso de percolação.

A palavra percolação vem do latim percolare, que significa filtrar. Em farmacologia e ciência dos materiais, se refere à extração de componentes solúveis passando solventes por materiais porosos. Na geologia, se refere à passagem de água pelo solo e pedras permeáveis fluindo para reservatórios subterrâneos.

O termo percolação não tem uma definição única, justamente pelo fato de possuir definições diferentes em áreas distintas do conhecimento. A ideia de um conceito mais universal para percolação pode ser tirada dos trabalhos de Broadbent e Hammersley [16] e Grimmett [14]. Com base nesses dois trabalhos pode-se dizer que, dá-se o nome de percolação ao fenômeno caracterizado pela passagem de uma informação de um ponto X até outro ponto Y, Figura 1.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

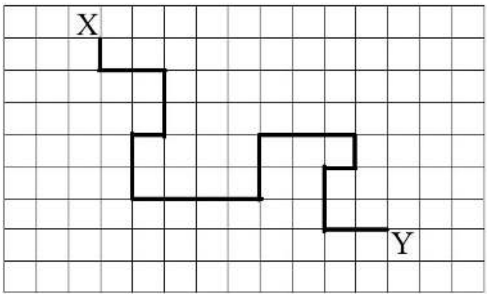

Figura 1: Caminho de uma informação de um ponto *x* até outro ponto *y*

A rede de percolação é um conjunto formado por vários pontos, estes pontos são idealizados para representar a estrutura do meio que se pretende modelar via rede de percolação. No caso descrito em Broadbent e Hammersley, por exemplo, os pontos representavam os poros existentes em uma rocha. Cada ponto da rede é chamado de sítio [28]. Neste sentido, os sítios são definidos como os pontos da rede [3]. Na Figura 1, a intersecção entre as linhas horizontais e as linhas verticais representaram os pontos ou sítios da rede. Diz-se que cada ponto representa um sítio (nó, nódulo, vértice). Todo o conjunto desses pontos é chamado de rede e as interligações entre dois pontos são definidas como elos (aresta, ligação). Os elos são formados quando se une dois sítios(pontos) vizinhos. Logo, elo é definido como a ligação entre dois sítios vizinhos. Os sítios e os elos podem ter duas configurações: aberto e fechado. O sítio ou o elo aberto significa que a informação pode fluir através dele enquanto o fechado impede esse fluxo. A quantidade de vizinhos de um sítio é determinada pelo formato da rede.

Existem inúmeras formas de rede. Em teoria dos Grafos estuda-se grande parte dessas formas, tais como: Rede de Bethe [3] e [23], Rede Quadrada [5], Rede Triangular [14], Rede colmeia etc. Para maior aprofundamento, sugere-se consultar Feofiloff [13]. Adiante, será dado enfoque a Rede chamada de rede Quadrada. Para todos os efeitos a rede criada neste trabalho aproxima-se da rede quadrada. A rede quadrada é chamada assim porque cada sítio possui quatro vizinhos: um em cima, um em baixo, uma na esquerda e outro na direita. A rede quadrada é simbolizada matematicamente por rede Z^2.

Na maioria dos trabalhos em percolação são usados modelos homogêneos e estes são bem definidos com transição de fase e expoentes críticos conhecidos, como podemos ver em Grimmett[14]. O modelo homogêneo recebe esse nome porque apresenta probabilidade constante de um sítio estar ativo(aberto), e este valor é único para qualquer sítio da rede. O modelo homogêneo considera um sistema de percolação onde cada sítio tem probabilidade p de estar ativo. A percolação não homogênea ou heterogênea recebe essa denominação pelo fato de seus sítios possuírem diferentes probabilidades de estarem ativos. No modelo heterogêneo a probabilidade p de um sítio estar ativo recebe uma função não constante $p = f(x)$.

Este artigo tem como objetivo mostrar que eventos de avalanche podem ser classificados como casos de percolação homogênea dirigida. Isto será feito mostrando dados quantitativos e qualitativos provenientes de simulações de avalanches. Os objetivos mais específicos serão de gerar e simular essas avalanches e, também, desenvolver um modelo que absorva todas as características de um evento de percolação.

Para justificar a realização deste trabalho, é preciso observar que as avalanches de areia, apresentadas nos trabalhos de Douady e Daerr [11], quando postas em via de simulação, apresentam comportamento de rede de percolação. Hinrichsen [17], realizou experimentos que recriavam avalanches, e notou que existia a possibilidade de simular avalanches como rede de percolação. O comportamento gráfico das simulações de avalanches de Hinrichsen mostraram um comportamento típico de percolação em modelo homogêneo bidimensional na rede quadrada. Surgiram, portanto, algumas perguntas acerca do ponto crítico do modelo, do comportamento da rede quanto à homogeneidade dos sítios e elos, e se é aceitável o comportamento heterogêneo. Além disso, surge um forte questionamento: É possível que dando o tratamento percolativo às avalanches, pode-se obter resultados próximos aos reais?

Para este trabalho, a informação transmitida será a avalanche e os sítios serão os grãos do material da avalanche, notando que a rede idealizada para este fim pode ser considerada como uma rede de percolação quadrada [25] que flui, unicamente, no sentido descendente, caracterizando o processo como percolação dirigida, Ver Figura 2.

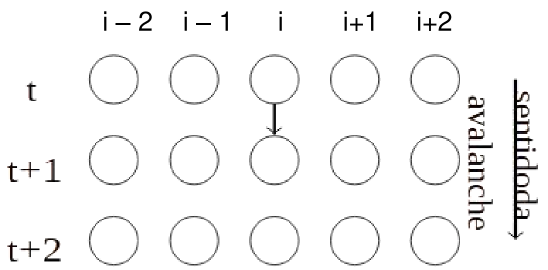

Figura 2: Os grãos do material da avalanche formando a rede

A percolação dirigida, também chamada de percolação orientada, é marcada pelo fato de o caminho de percolação migrar rumo a uma direção predeterminada. Por exemplo, no caso de uma rolha na base de um tubo vertical contendo água, onde a gravidade faz pressão sobre a água que tenta passar através da rolha usando como caminho os poros da rolha. No caso descrito a percolação vai de cima para baixo, mas pode ter outras formas de orientação como da esquerda para direita ou vice-versa [14].

Um conjunto para o qual se pode definir um peso estatístico é chamado de evento [21]. Para conceber a rede o *status* de evento, atribuir se a cada sítio uma medida de probabilidade p de estar aberto e $1-p$ de estar fechado, com $0 \le p \le 1$. Desta forma, pode se imaginar inúmeras ligações entre os sítios da rede, caracterizando aglomerados distintos dentro da rede. Cada aglomerado ou avalanche existindo com probabilidade distinta de ocorrer.

1 TRANSIÇÃO DE FASE

Chama-se de Transição de Fase em percolação o fato de em uma dada rede e para um dado intervalo de probabilidade p não existir percolação, enquanto para o intervalo complementar de p, haverá uma probabilidade positiva de percolação.

Definimos como probabilidade de percolação θ(p), a probabilidade de um sítio pertencer a um aglomerado de tamanho infinito. Denotado por $\{O \leftrightarrow \infty\}$ ou $|C| = \infty$, como sendo o evento: “A origem pertence a um aglomerado de tamanho infinito”. Assim, matematicamente [5]:

$$\theta(p) = P_p(|C| = \infty). \tag{1}$$

Como consequência imediata da definição matemática de percolação podemos obter, alternativamente, outra equação matemática para 1:

$$\theta(p) = 1 - Pp(|C| < \infty). \tag{2}$$

A equação 2 é a probabilidade complementar [21] do evento “A origem pertence a um aglomerado de tamanho infinito”. Portanto, $Pp(|C| < \infty)$ é a probabilidade de um aglomerado de tamanho finito. Um evento complementar é um evento que leva em conta a exclusão de outro evento, em suma ele representa a não ocorrência do evento principal.

Dado que percolação está definida como um evento de probabilidade, sua ocorrência atrela-se ao parâmetro p de forma que para valores pequenos de p não teremos percolação e em se considerando valores maiores para p poderemos ter percolação. Esse fato caracteriza a mudança de fase em percolação.

Neste sentido é cabível ressaltar que $0 \leq p \leq 1$. Desta forma existe um pc dentro desse intervalo que serve como limiar onde para os valores abaixo desse limiar não haverá percolação enquanto para valores superiores teremos probabilidade positiva do sistema percolar.

Os valores de p_c não são fáceis de encontrar, porém alguns valores são bem conhecidos. Em Souza 2014 [30], Sykes [31] e Tavares *et al.,* (2015) [32] estes valores são vistos com riqueza de detalhes, bem como proceder para encontrar esses valores.

2 MODELOS DE AVALANCHE

Sistemas constituídos de muitos componentes interagindo entre si podem apresentar um tipo interessante de comportamento auto-organizado, tal comportamento recebe o nome de Criticidade Auto Organizada, *Self Organized Criticality* – SOC.

Existem alguns modelos que tratam da criticidade em pilhas de areia, entre eles os modelos BTW, Manna, Burridge-Knopoff e OFC. Estes modelos são bem detalhados em [24] e [8]. O modelo BTW é o pioneiro entre todos. Ele funciona da seguinte maneira, em uma dimensão (1D): define-se um vetor h de largura L igual ao tamanho do sistema, onde hi representa a altura da pilha na posição horizontal i. A evolução da inclinação local, dada por $Zi = hi - hi+1$, é ditada pela seguinte regra,

$Zi \rightarrow Zi + 1$ quando um grão é adicionado ao sítio i.

$Zi-1 \rightarrow Zi-1 - 1$

$Zi \rightarrow Zi - 2$ quando zi ultrapassar o valor crítico.

$Zi\pm1 \rightarrow Zi\pm1 + 1$

O modelo BTW foi o precursor e, notadamente, relevante para a compreensão de fenômenos diversos que apresentam grandes flutuações e são invariantes por transformações de escala. Ele motivou uma série de investigações experimentais da dinâmica de avalanches em meios granulares.

Um outro modelo de avalanche bastante importante é apresentado no trabalho de Hinrichsen *et al.*, (2000), onde, as avalanches foram criadas via simulação computacional, porém com uma abordagem diferente do modelo BTW. A modelagem de Hinrichsen é similar à do trabalho de Douady e Daerr que é a base para as modelagens de avalanches como rede de percolação. Os dados de Hinrichsen foram comparados aos dados de Douady e Daerr (1998) que trabalharam em um experimento real. O experimento de Douady e Daerr usava uma mesa recoberta com veludo onde repousava a sílica (areia) que formava uma camada uniforme por toda extensão da mesa. Inclinava-se a mesa até certa angulação e se iniciava a avalanche com um leve toque na areia do topo da mesa.

Com o objetivo de criar uma modelagem que absorva o comportamento aleatório das avalanches, tem se como base o experimento de Douady e Daerr (1998) e as simulações de Hinrichsen, porém será criada uma modelagem própria. A modelagem proposta recebe influências dos trabalhos supracitados, porém difere em alguns aspectos, onde o principal é a existência de uma probabilidade para transmissão de energia entre os grãos.

2.1 O experimento de Douady e Daerr e o modelo de Hinrichsen

O experimento de Douady e Daerr é um experimento simples, onde a avalanche é formada por grãos de areia espalhados em uma mesa recoberta por veludo. Eleva-se uma borda da mesa, conferindo-lhe certa inclinação. Os grãos do topo repousam sobre os grãos da linha de baixo, por isso a camada em baixo concede para a camada do topo energia potencial de altura (Ep), como na Figura 3. Nestes moldes os grãos necessitam absorver certa quantidade de energia para entrarem no estado ativo, esta energia inicial é dita Energia de Barreira (Eb). Um grão ativo é definido com um grão que possui energia maior que a energia de barreira.

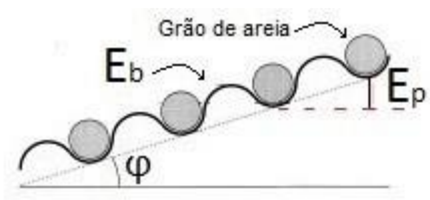

Figura 3: Energias do sistema

Hinrichsen [17] considerou a abordagem de Douady e Daerr, e acrescentou o caráter percolativo assumindo os grãos como sítios de uma rede retangular quadrada (Z^2). No contexto de Hinrichsen, os grãos são os sítios, logo, os grãos sobre a mesa representam a rede. A rede é formada por quatro lados, porém, os grãos rolam no sentido da gravidade desta maneira o sistema percola em uma direção preestabelecida. O fato de os grãos rolarem para baixo encaixa o modelo como percolação dirigida (veja, Figura 4) [26].

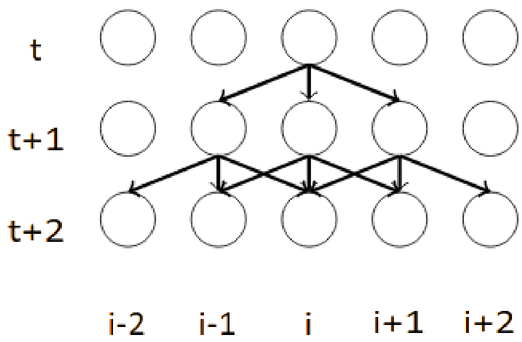

Figura 4: Transmissão da energia na rede

A Figura 4, mostra o desenho esquemático do plano, a forma de transmissão da energia entre os grãos e também revela o modelo de referencial para os sítios. Este modelo de referencial identifica um sítio da rede como um par (t, i). Naturalmente, t e i só admitem valores inteiros ou zero, pois representam uma rede de percolação quadrada.

Os valores de t representaram a linha que o sítio está situado e também a distância do sítio para a borda superior, enquanto i descrimina a coluna e a distância do sítio em relação a coluna central. Importante notar que a mesa tem limitações laterais, assim sendo, temos que (t, i) representa sítios até as bordas da mesa. No trabalho de Hinrichsen [17], há uma clara analogia entre t é o tempo(iteração). Esta comparação é possível considerando cada linha da rede como um passo de iteração computacional, ou seja, no instante t = 1 tem se a primeira iteração que ocorre na linha t = 1.

As linhas horizontais de sítios (grãos) somente terão sítios ativos se na linha acima houver sítios ativos. Em outras palavras, grãos ativos em uma linha acima podem ativar os grãos da linha abaixo. Um sítio X pode inicialmente estar ativo se, pelo menos, um dos sítios na vizinhança da linha acima estiver ativo. O sítio ativo acima de X pode transferir energia para X; Se $\Delta E(X)$ a energia total transferida para X, exceder a barreira de energia E_b, X fica ativo. O grão ativo “rola para baixo” e colide com o grão da próxima linha, a energia produzida nessa colisão é $1+\Delta E(X)$, onde 1 é a energia potencial da diferença de altura entre as duas linhas consecutivas (linha de X e a linha abaixo).

Supondo que ao rolar o grão ativo vai se chocar com os três vizinhos da linha abaixo. A energia dissipada na colisão é denotada por f, enquanto a energia transferida é dividida igualmente entre os três vizinhos da linha abaixo.

Por todas essas características o modelo de Hinrichsen possui duas variáveis:

1. Uma variável de ativação S_i^t;

2. Uma variável de energia E_i^t.

Com os seguintes valores, dada a condição do sítio:

	Situação do Sítio	
Variável	Inativo	Ativo
S_i^t	0	1
E_i^t	$E_i^t \leq E_b$	$E_i^t > E_b$

Tabela 1: Valores das variáveis do modelo de Hinrichsen

A energia de barreira (E_b) e a fração de energia dissipada (f) são parâmetros que controlam o modelo. Nos trabalhos de Douady & Daerr e Hinrichsen, aparecem outros parâmetros das avalanches como: ângulo de abertura (θ) e espessura (H) das avalanches.

2.2 Modelo proposto

O modelo de avalanche descrito por Hinrichsen, influenciou fortemente a modelagem. Podemos imaginar uma pilha de areia na qual os grãos repousam uns sobre os outros como os blocos que formam uma pirâmide. Os grãos da superfície da pilha são aqueles os quais nem um outro grão o sobrepõe. Fazendo uma analogia da pilha de areia com o planeta Terra, os grãos da superfície seriam como a exosfera que envolve todo planeta Terra. Exosfera é o nome da camada mais externa da atmosfera terrestre a partir da superfície. Considerando a analogia, a pilha de areia é formada por várias camadas sobrepostas, contudo o material de cada camada são os grãos de areia. Em Hinrichsen, os grãos da camada superficial são os sítios da rede de percolação, Hinrichsen condicionou as avalanches considerando que apenas os grãos da camada superficial participassem do evento, portanto a superfície da pilha é considerada uma rede quadrada de percolação.

Diferente dos experimentos de Douady e das simulações de Hinrichsen, em que a inclinação do plano agia como regulador da atividade dos sítios. Especificamente no modelo de Hinrichsen, existia uma energia de barreira, uma cota de energia que precisava ser ultrapassada para que o sítio pudesse se ativar e transmitir energia para o sítio da vizinhança, tornando assim um processo de transmissão de energia de sítio para sítio. Se a energia recebida fosse baixa o sítio não se ativaria encerrando o processo. No modelo proposto, os sítios não dependem de uma forma de energia e sim da atividade de outros sítios. Os sítios são configurados com certa probabilidade de receberem atividade. Um sítio ativo transmite atividade aos seus vizinhos.

Para Simular, recriou-se um plano retangular dimensionado da seguinte maneira: tmax = 220 e imax = 50, este retângulo será a rede de percolação que representa a superfície da pilha de areia, os pontos(sítios) representam os grãos. Estes valores foram escolhidos, pois são suficientemente grandes, para conciliar quantidade de sítios e facilidade de simulação. Além disso, foram realizadas 103 simulações preliminares com uma rede maior e os resultados apontaram que 100% dos tamanhos foram menores que 120 pontos para a faixa de probabilidade aplicada. Ainda justificando o dimensionamento do plano, tem que se levar em conta trabalhar com as condições periódicas de contorno.

Condição de contorno periódica é equivalente a um modelo definido em uma rede plana infinita, mas com uma regularidade periódica em ambas as direções da rede (vertical e horizontal). Como em uma rede infinita não existe o problema de ter que tratar os limiares da rede de forma diferente, isso equivale a não usar bordas no modelo. Portanto, sendo a condição ideal para simulações como as da natureza deste trabalho, pois essa abordagem é muito comum em vários problemas de mecânica estatística [26].

Com este dimensionamento tem se uma rede de 22000 sítios. Estes 22000 sítios são espalhados no plano retangular, um ao lado do outro, sem sobreposição de sítios, criando uma rede quadrada de sítios. Um dos lados do retângulo receberá a denominação de topo e deste a energia fluirá, através das linhas de sítios para as outras extremidades do retângulo. A transmissão da energia dentro do retângulo é feita de sítios para sítio e leva em conta três vizinhos da linha subsequente como na Figura 4.

Aqui a energia de barreira se relaciona com p da percolação. A energia dissipada é variável de maneira que a energia que chega no grão da linha de baixo pode ser ou maior que E_b ou menor que E_b. Podemos fixar um valor para barreira tal como se fixa uma probabilidade para um evento, assim temos:

$$E_b \sim p \tag{3}$$

A Equação 3 é, claramente, a resposta para a problemática do artigo, pois através dela conseguiremos dar as avalanches um tratamento percolativo. Geralmente são as forças de contato e de campo que ditam as interações entre os grãos de areia dentro da avalanche, porém com esse artifício, comprime-se essas forças num parâmetro probabilístico, dando a interação entre os grãos o caráter percolativo.

Fato interessante, é que as simulações de Hinrichsen possuíam duas variáveis de controle S_i^t e E_i^t, porém essa simplificação provocada pela equação 3, deixa o sistema com apenas uma variável, a saber: p. Outro dado que devemos saber com o estímulo de advertência é a diferença entre p e θ(p). A primeira é a probabilidade de um sítio torna-se ativo, enquanto a segunda é a probabilidade de a avalanche estender-se até o infinito ou ter um tamanho específico.

Ao passo que usando a Equação 3 podemos converter avalanche em um evento percolativo, resta explorar a magnitude deste evento. Com o tratamento da física a complexidade de analisar a iteração partícula por partícula seria absurdamente alta. Entretanto, calcular a magnitude de eventos percolativos é simplesmente encontrar a probabilidade de percolação até certo ponto. Do ponto de vista computacional, o tratamento percolativo facilita os cálculos reduzindo o esforço e aumentado significativamente o tempo de resposta. Em termos práticos simulações que levariam dias podem rodar em horas.

O modelo será implementado computacionalmente como evento de percolação. Ou seja, os sítios ficam ativos com probabilidade p e inativos com (1−p). O sítio O (0,0) que no experimento de Douady e Daerr era ativado com um impulso externo, aqui, inicialmente estará ativo com probabilidade p de passar essa atividade para os vizinhos da linha abaixo. Nos Eventos de "SOC"o sistema deve evoluir até um estado de excitação, onde a possibilidade de ocorrer a avalanche é quase certa. Nesta modelagem o sistema já se encontra nesse estado, diferente do experimento de Douady que necessitava de certa inclinação para obter o estado de instabilidade no qual a pilha de areia desmoronasse criando, assim as avalanches.

A forma mais simples para se simular computacionalmente uma avalanche é modelá-la na forma de um autômato celular. Um autômato celular é um sistema dinâmico formado por muitas unidades interagindo umas com as outras, podendo ser visto na forma de uma matriz de sítios onde existe uma regra de interação que influência apenas os vizinhos mais próximos à região dos fenômenos [24].

A participação dos sítios na avalanche será composta por três estágios [9]. Cada estágio é representado por uma cor. Os sítios inicialmente terão coloração branca indicando que estão inativos. No estágio dois, os sítios ficam ativos e passaram para a cor vermelha, indicando que estão ativos. No último estágio, eles ficaram na cor preta, indicando que participaram da avalanche. Os sítios da borda inferior da avalanche ficaram com a cor vermelha indicando que estão ativos e em transição, ou seja, receberam energia do sítio da vizinhança acima, e na próxima iteração, eles que transferirão essa energia para os sítios da linha consecutiva abaixo, como na Figura 5.

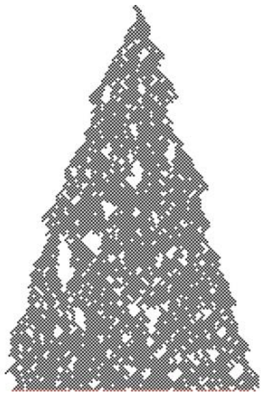

Figura 5: Simulação de avalanche no modelo proposto com p = 0.5

O modelo proposto de avalanche é finalizado, dando um valor probabilístico para cada sítio, isto significa dizer que um sítio ficará ativo aleatoriamente de acordo com sua probabilidade. É esta característica probabilística que torna a avalanche um caso de percolação.

O modelo de avalanche acima descrito é chamado de Avalanche como rede de percolação homogênea. A designação homogênea ocorre em virtude de a probabilidade de um sítio estar ativo ser constante, sendo o mesmo valor para qualquer sítio da rede. Diz-se que um sítio da rede tem probabilidade p de estar ativo.

3 MÉTODO

Os experimentos de Douady e Daerr foram realizados sobre uma mesa recoberta com tecido de veludo. Para criar suas simulações Hinrichsen, criou, computacionalmente, uma mesa para aproximar suas simulações dos experimentos de Douady e Daerr. No experimento de Douady e Daerr, a avalanche de sílica acontecia sobre a mesa, e desta mesma maneira Hinrichsen elaborou suas simulações, recriando a mesa e sobre esta fazendo acontecer as avalanches.

Percebe-se que para simular o evento da avalanche é fundamental que se recrie o leito por onde escoará a avalanche. Importante notar que a criação da mesa também implica criar limites para a extensão das avalanches, por exemplo, se a avalanche se prolongar até as bordas da mesa não haverá mais espaço e nem grão para a avalanche continuar. Por esse motivo, a mesa pode ser vista nas simulações como uma caixa. A interação e o comportamento dos grãos ao se chocarem com as paredes da caixa são preestabelecidas pelas condições de contorno. Estas condições devem ser estabelecidas de tal modo que seus efeitos não interfiram no resultado das simulações.

Criou-se, computacionalmente, uma mesa(plano) retangular com as dimensões 201×221 pontos. Esta será a caixa onde serão feitas as simulações. Essas dimensões facilitam a simulação, pois reduzem o tempo de simulação e o esforço computacional, visto que a caixa terá condições periódicas de contorno, desta forma a rede se ajusta ao tamanho da avalanche quando ela se aproxima da borda [24] e [8]. Nesta caixa que as avalanches acontecerão.

Para monitorar numericamente as simulações criamos duas variáveis que são o tamanho da avalanche (t) e o transiente de avalanche N(t). O tamanho da avalanche (t) é a distância da borda superior até a última linha ativa da avalanche, t serve para sabermos o tamanho da avalanche, ou seja, é através deste que chegaremos a taxa média de sobrevivência. O transiente de avalanche é a quantidade de sítios que ficaram ativos, este será usado para sabermos a quantidade média de sítios que ficaram ativos em cada avalanche.

Cada simulação terá 10^5 réplicas, pois a máquina disponível não consegue processar números maiores de simulações. A probabilidade p será definida antes de cada simulação. Deste modo configuramos $p = 0.5$ nas simulações do modelo homogêneo.

Espera-se que o modelo de percolação homogênea tenha baixo impacto, pois os modelos homogêneos apresentam transição de fase para valores de p_c bem altos, veja Tavares et al., (2015) [32]. Pelo fato de os modelos homogêneos possuírem valores elevados para p_c, acredita-se que as avalanches geradas pelo modelo homogêneo terão transiente pequenos.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

O desafio posto nesse trabalho é mostrar que as avalanches podem ser caracterizadas como caso de percolação homogênea dirigida. Para realizar esta tarefa foi necessário usar a hipótese de que, na fase ativa, a barreira de energia pode ser substituída por uma probabilidade. Visto que o comportamento da barreira é, justamente, de regular a atividade dos sítios dentro da avalanche. Substituir esse parâmetro físico por um probabilístico é, aparentemente, algo logicamente aceitável.

Para validar está hipótese é necessário aplicar o método de iteração proposto e analisar o comportamento das avalanches pelos pontos de vista qualitativo e quantitativo.

Percolação é um modelo probabilístico que exibe uma transição de fase. A modelagem criou uma rede de percolação e a encaixou numa versão simples de rede percolação, que é a rede quadrada (rede Z^2). A percolação na rede quadrada ocorre entre vértices vizinhos e direcionando-se num sentido preestabelecido, tem-se percolação direcionada em rede quadrada. Todos os vértices de Z^2 são independentes uns dos outros, escolhidos para serem ativos com probabilidade p e inativos com probabilidade (1−p). Broadbent e Hammersley provaram que existe um p_c para percolação em Z^2 tal que: $0 < p_c < 1$. De modo que existe uma transição de fase para a rede Z^2.

Em se tratando de análise qualitativa, um dos pontos a se observar é a transição de fase. Dada a caracterização da rede como Z^2, é evidente que temos transição de fase de primeira ordem, pacificado no trabalho de Broadbent e Hammersley. Para ilustrar essa constatação temos a Figura 6.

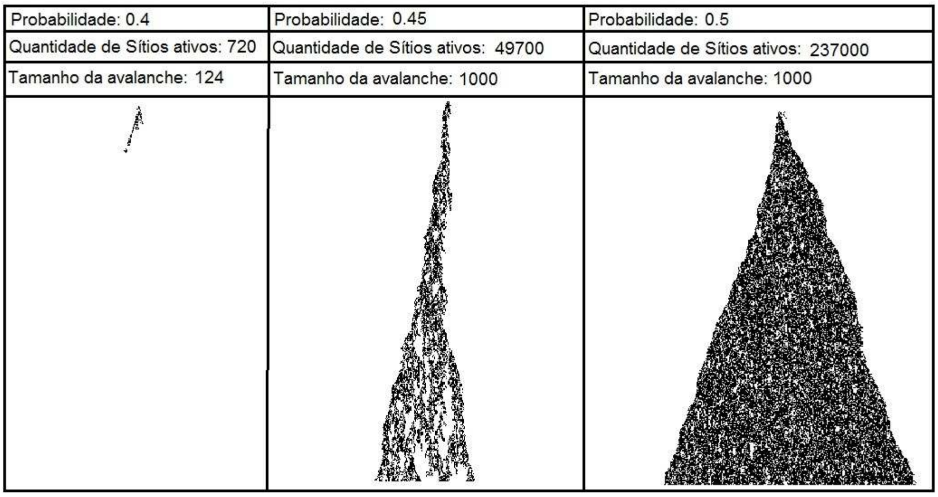

Figura 6: Avalanches com probabilidades diferentes

Na Figura 6, podemos observar que quanto mais a probabilidade p se distancia de 0.5 em direção ao zero, menores são os tamanhos e a quantidade de sítios ativos nas avalanches. Para evitar questionamentos acerca do real p_c deste modelo, podemos nos apoiar em [32], onde:

$$\zeta(p) = \frac{1}{\ln(r-1)} \tag{4}$$

Onde ζ(p) é a função que garante a existência de um caminho entre a origem e a fronteira do aglomerado. E é verdade para o caso homogêneo, onde temos $\zeta(p) = (-\ln(p))^{-1}$ e a solução é dada por $p_c = 1/(r-1)$, sendo r = 3.

As avalanches simuladas, qualitativamente, devem possuir certas características, com observado por Hinrichsen:

“A avalanche foi compacta, triangular e fortemente delineada nas bordas.”

Este é o comportamento esperado das simulações. Hinrichsen, expõe que este comportamento das avalanches caracterizam resultados qualitativamente bem simulados, haja vista o comportamento das avalanches nos experimentos de Douady e Daerr. Na Figura 6, podemos ver claramente este comportamento, o que significa que as simulações estão qualitativamente bem realizadas. Se considerarmos o gradativo aumento no ângulo de abertura, no delineamento das bordas e forma triangular que aparente.

Trabalhou-se com simulações de avalanches, considerando-se estas como casos de percolação dirigida. Para os modelos de avalanches com percolação dirigida do tipo homogênea foram simuladas 10^5 réplicas, levando em conta o valor de probabilidade fixo de $p = 0.5$. Guardamos os valores do tamanho da avalanche e da quantidade de sítios ativos de cada avalanche.

No ano de 2010, o professor Samuel Rocha da Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP), elaborou um trabalho que consistia em simular avalanches usando grãos de feijões. Este trabalho foi publicado pelo Ministério da Educação e serve como base para professores do mundo todo elaborarem suas aulas e realizar experimentos de avalanche [27]. Toda metodologia de como realizar esse experimento pode ser encontrada no site: http://m3.ime.unicamp.br. Usamos os dados deste experimento para comparar o comportamento das avalanches reais feitas de grãos de feijão com os eventos simulados, apresentados na Figura 7.

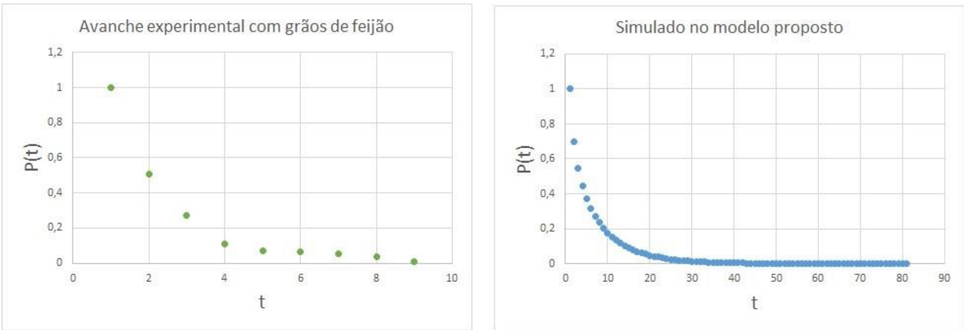

Figura 7: Comparação entre a probabilidade de sobrevivência de 10^5 réplicas no modelo proposto e um experimento real de avalanche feita de grãos de feijão.

Resguardando as proporções, é evidente a similaridade no comportamento da Probabilidade de sobrevivência do trabalho de Hinrichsem e a deste trabalho. Porém, os gráficos desta obra parecem ter uma calda mais leve [12], permitindo avalanches maiores com menor probabilidade do que se levássemos em conta a aproximação dada pelas equações apresentadas em Hinrichsen. Ademais, esse tipo de comportamento é o que mais se parece com o apresentado no trabalho de Hinrichsen. Levando em conta que no trabalho dele, existe aproximadamente 50 tentativas sem ativação e uma grande mudança na escala quando $P(t) < 0,1$. Resultando num gráfico constante $P(t) = 1$ para $0 < t < 50$ e uma calda pesada para $t > 10^3$.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

5 CONCLUSÕES

Iniciou-se este trabalho falando sobre avalanches, sua definição e características, em seguida focou-se em explanar as nuances do ramo da percolação. Mostrou-se, resumidamente, alguns elementos dos sistemas percolativos como: sítio, elo, caminho, tipos de redes, transição de fase e ponto crítico. Abordamos como se iniciou os trabalhos de simulação de avalanche. Desta forma, criou-se um ambiente para introduzir a percolação no contexto das simulações de avalanche.

Posteriormente, abordamos as características das modelagens de avalanche. Sobre esse assunto, comentou-se o trabalho de Bak e colaboradores [1], um dos pioneiros em simulação de avalanches. Os modelos que influenciaram para a realização deste, foram os modelos de Douady e Daerr e o modelo de Hinrichsen. Mostramos algo fundamental sobre a percolação que é a transição de fase, além disso apresentamos alguns modelos de simulação de avalanches. A maioria dos modelos não considera uma abordagem percolativa, contudo o trabalho de Douady & Daerr [4] inspirou Hinrichsen [17] que introduziu a abordagem percolativa para os problemas de simulação de avalanche.

O conhecimento das modelagens foi usado para gerarmos nossa própria modelagem. O modelo proposto difere bastante dos antigos no sentido de que é uma abordagem totalmente percolativa, aglutinando uma gama de parâmetros em uma única variável. Esta mudança foi analisada quantitativa e qualitativamente através das simulações. Com uma malha de 201×221 pontos, realizamos 10^5 simulações, embora seja um valor elevado de simulações, ainda assim foi limitado pela capacidade operacional da máquina.

Simulamos avalanches admitindo que estas se comportam como caso de percolação homogênea dirigida.

Do ponto de vista quantitativo, revelou-se que a percolação homogênea tem baixa sobrevivência quando atribuímos baixos valores de probabilidade para p, isto por conta da rede usada possuir transição de fase em $p = 0.5$. Os transientes neste caso são pequenos e raramente percolam. Por outro lado, este modelo é adequado para representar eventos com alta probabilidade de perturbação dos sítios. Os transientes são robustos e a alta quantidade de simulações que percolaram dão a dimensão do excelente ajuste entre a hipótese e a realidade. Percebemos que valores de p, acima de 0.5, geram redes infinitas com altos valores de transiente de avalanche.

Do ponto de vista qualitativo, a implementação do modelo ajudou na visualização de algumas propriedades comuns aos sistemas percolativos, tais como angulo de abertura, tamanho e o transiente de avalanche. Podemos ver a delineação dos aglomerados gerados, e mencionar a forma triangular esperada. A delineação das bordas, tal como em Hinrichsen, releva o grau de ajuste da hipótese, pois caso contrário teríamos formações não triangulares, o que é atípico para as avalanches dirigidas geradas em simulações, ademais percebemos que em se aumentando o valor de p, o angulo de abertura θ também aumenta. Notou-se que o comportamento do tamanho e o transiente das avalanches está atrelado ao parâmetro p, pois variando se o p para próximo de 1, os transientes são mais compactos e maiores.

A luz dos resultados, fica evidente que as avalanches podem ser descritas por um modelo de percolação homogênea dirigida.

REFERÊNCIAS

1 Bak Per, Tang Chao, Wiesenfeld Kurt. Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise. Physical review letters. 1987;59(4):381.

2 Berg van den J, Kiss D, Nolin P. A Percolation process on the binary tree where large finite clusters are frozen.Electronic Communications in Probability. 2012;17(2).

3 Bethe Hans A. Statistical theory of superlattices. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences. 1935;150(871):552-575.

4 Bollobás B, Gundersony K, Holmgrenz C, Jansonx S, Przykucki M. Bootstrap percolation on Galton-Watson trees. Electron. J. Probab. 2014;19.

5 Braga Gastão A, Francisco F, Araújo Jr., Caracterização da fase desordenada do modelo de Ising d-dimensional via desigualdades de correlações, Revista Matemática Universitária, 2002.

6 Broadbent Simon R, Hammersley John M. Percolation processes: I. Crystals and mazes. In: Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society. Cambridge University Press; 1957. p. 629-641.

7 Bruss FT. A Note on Extinction Criteria for Bisexual Galton-Watson Processes. Journal of Applied Probability; 1984.

8 Castro Paulo Alexandre de. Rede complexa e criticalidade auto-organizada: modelos e aplicações. [Tese de Doutorado]; São Paulo: Universidade de São Paulo; 2007.

9 Chalupa J, Leath PL, Reich GR. Bootstrap percolation on a Bethe latice, J. Phys. 1979;C 12.

10 Czarnecki Andrzej, Vicinity of the percolation threshold the Bethe Lattice; 2010.

11 Daerr Adrian, Douady Stéphane. Two types of avalanche behaviour in granular media. Nature. 1999;399(6733):241-243.

12 Dogruyol Z, Arsu N, Pekcan, O, Critical exponents of photoinitiated gelation at different light intensities. Journal of Macromolecular Science, Part B: Physics. 2009;48.

13 Feofiloff Paulo, Kohayakawa Yoshiharu, Wakabayashi Yoshiko. Uma introdução sucinta à teoria dos grafos. 2011.

14 Grimmett Geoffrey, Grimmett Geoffrey. What is percolation?. Springer Berlin Heidelberg, 1999.

15 Grimmett Geoffrey R, et al. Inhomogeneous bond percolation on square, triangular and hexagonal lattices. The Annals of Probability. 2013;41(4):2990-3025.

16 Haccou P, Jagers P, Vatutin, VA. (eds.). Branching Processes: Variation, Growth and Extinction of Populations. Cambridge: Cambridge University Press; 2005.

17 Hinrichsen Haye et al. Flowing sand—a possible physical realization of Directed Percolation. Journal of Statistical Physics, 2000;98(5-6):1149-1168.

18 Jatene, Carlos AS, Percolação Regular em Rede Quadrada com Probabilidade Sub-limitada em Ondas, UFPA, 2007.

19 Laumann CR, Parameswaran SA, Sondhi, SL Absence of Goldstone bosons on the Bethe lattice. Phys. Rev. 2009;B 80.

20 Locatelli Gabriel Olívio et al. Predição de Um Modelo de Percolação de Óleo Diesel em Areias da Praia do Porto de Suape–PE, Brasil. Geologia. 2015;28(1).

21 Magalhães Marcos Nascimento. Probabilidade e Variáveis Aleatória, São Paulo: IME-USP; 2004.

22 Magalhaes Caio Franca Merelim. Simulação de materiais granulares, [Dissertação de mestrado]; Belo Hrizonte: UFMG; 2008.

23 Mancini FP. Magnetic properties of a strongly correlated system the Bethe lattice. Statistical Physics: ModernTrends and Applications (Lviv) Conference proceedings, 2010.

24 Miranda LB. Avalanches e Criticalidade Auto organizada em Pilhas de Areia Estocásticas, [Dissertação de Mestrado]; Belo Horizonte: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais - MG, 2012.

25 Nachmias A, Yuval Peres. Non-amenable Cayley graphs of high girth have pc < pu and mean-field exponents. Electron. Commun. Probab. 2012.

26 Namba AM, Da Silva VB, Da Silva CHTP. Dinâmica molecular: teoria e aplicações em planejamento de fármacos. Eclética Química. 2008;33(4).

27 Oliveira Samuel Rocha de. Guia do professor - Experimento - Avalanches, Ministério da Educação, Campinas, SP: Unicamp; 2010.

28 Partzsch L, Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians. Birkhäuser Verlag, Boston—Basel—Stuttgart 1982. 423 S., s Fr. 68. Biometrical Journal. 1985;27(8):947-948.

29 Rolla LT, Teixeira AQ. Last passage percolation in macroscopically Inhomogeneous media. Electronic Communications in Probability, 2008.

30 Souza Raimundo NC de. Ponto crítico da rede de Bethe não homogênea. Dissertação (Mestrado) - Instituto de Ciências Exatas e Naturais da Universidade Federal do Pará. Programa de Pós-Graduação em Matemática e Estatística, Belém, 2014.

31 Sykes Mq F, Essam John W. Exact critical percolation probabilities for site and bond problems in two dimensions. Journal of Mathematical Physics. 1964;5(8):1117-1127.

32 Tavares Heliton Ribeiro et al. Densidade Crítica no Modelo de Percolação em Rede de Bethe Não-Homogênea. TEMA (São Carlos). 2015;16(2):173-182.

33 Vogel EE, Lebrecht W, Valdés JF. Bond percolation for homogeneous two-dimensional lattices. Physica A, 2010;389(8):1512-1520.