



**ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS**

**CANTILEVER BEAMS GIRDER ANALYSIS IN METALIC STRUCTURES IN THIN WALLED BEAMS**

**ANÁLISIS DE VIGAS DE BALCON EN ESTRUCTURAS METÁLICAS EN PERFILES DELGADOS**

Luiz Carlos Mendes<sup>1</sup>, Vancler Ribeiro Alves<sup>2</sup>

e545126

<https://doi.org/10.47820/recima21.v5i4.5126>

PUBLICADO: 04/2024

**RESUMO**

Com o uso da Computação Algébrica Simbólica e de métodos matriciais, foi realizada a pesquisa do comportamento de vigas balcão em estruturas metálicas. O método da flexibilidade foi utilizado para analisar perfis metálicos em hastes de paredes delgadas sujeitos ao empenamento considerando a introdução de um grau de liberdade que é o empenamento, surgido pela presença do bimomento. Foram feitas análises de bimotoentos, momentos fletores e momentos torçores. Foram calculadas as tensões geradas pelos bimotoentos e momentos fletores, ficando possível se determinar o comportamento de bimotoentos e tensões de bimotoentos, variando o emprego dos perfis metálicos. Nós com excessos de tensões são reforçados com chapas metálicas, impedindo futuras anomalias.

**PALAVRAS-CHAVE:** Hastes de paredes delgadas. Bimotoentos. Torção de empenamento.

**ABSTRACT**

*When using symbolic algebraic computation and matricial methods it is possible to search the structural behavior of a cantilever beam girder. The flexibility method is used to analyze profiles of thin-walled beams, considering the introduction of a new degree of freedom (warping of the transverse section) due to the request of the bimoments. Analyses of bimoments, flexural moments and torsional moments are shown. The stresses generated by bimoments and the flexural moments are calculated. It is therefore possible to determine the behavior of bimoments and stresses according to the simultaneous change of several profiles, identifying nodes which are to be about an intervention and rehabilitation work using rigid shapes.*

**KEYWORDS:** Thin walled beams. Bimoments. Flexural twist.

**RESUMEN**

*Utilizando Computación Algebraica Simbólica y métodos matriciales, se investigó el comportamiento de vigas de balcón en estructuras metálicas. El método de la flexibilidad se utilizó para analizar perfiles metálicos en varillas de paredes delgadas sujetas a alabeo considerando la introducción de un grado de libertad que es el alabeo provocado por la presencia de bimomento. Se realizaron análisis de bimotoentos, momentos flectores y momentos de torsión. Se calcularon las tensiones generadas por bimotoentos y momentos flectores, permitiendo determinar el comportamiento de los bimotoentos y tensiones bimotoentos variando el uso de perfiles metálicos. Los nudos con exceso de tensión se refuerzan con láminas metálicas para evitar futuras anomalías.*

**PALABRAS CLAVE:** Perfiles de pared delgada. Bimotoentos. Giro de deformación.

<sup>1</sup> Engenheiro Civil pela Universidade Federal Fluminense (RJ). Mestre em Ciências da Engenharia Civil pela Universidade Federal Fluminense (RJ). Doutor em Ciências da Engenharia Civil pela COPPE/UFRJ (RJ). Professor Titular do Departamento de Engenharia Civil da Universidade Federal Fluminense (RJ).

<sup>2</sup> Engenheiro Civil pela Universidade Federal Fluminense (RJ). Mestre em Ciências da Engenharia Civil pela Universidade Federal Fluminense (RJ). Doutor em Ciências da Engenharia Civil pela Universidade Federal Fluminense (RJ). Professor Adjunto do Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca (RJ).



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancler Ribeiro Alves

### INTRODUÇÃO

A viga balcão de marquises ou de estruturas de pontes rolantes constituída de elementos delgados em estrutura metálica comumente está sujeita aos esforços torsionais externos, que geram a solicitação de bimomento. Associadas a estas grandezas estão a torção de empenamento e a de Saint-Venant, bem como as de cisalhamento que derivam delas (Megson, 1974). O objetivo deste trabalho, no âmbito das patologias das estruturas, é analisar o comportamento dos perfis esbeltos dispostos em viga balcão e, por meio dos métodos analíticos associados à computação algébrica simbólica, identificar os pontos influenciados pelo empenamento e as tensões de bimomento relevantes. Comparando-se as tensões de flexão e as devidas ao bimomento para diversos tipos de perfis e carregamentos externos de torção, é possível identificar os pontos que necessitam de uma intervenção, de reforço com chapas e cantoneiras de enrijecimento a fim de se tornar o projeto o mais otimizado e confiável possível.

O comportamento de elementos estruturais em hastes de paredes delgadas foi inicialmente abordado de maneira satisfatória pelo soviético Vasili Zakharovitch Vlasov por volta de 1935, quando foi apresentada sua teoria de flexo-torção, introduzindo dois novos esforços denominados torção de empenamento ( $T_{\omega}$ ) e bimomento ( $M_{\omega}$ ), e, também novas propriedades geométricas para as seções transversais, tais como: coordenada setorial ( $\omega$ ), momento setorial ( $S_{\omega}$ ), momento de inércia setorial ( $I_{\omega}$ ) e produtos de inércia setoriais ( $I_{\omega y}$ ) e ( $I_{\omega z}$ ).

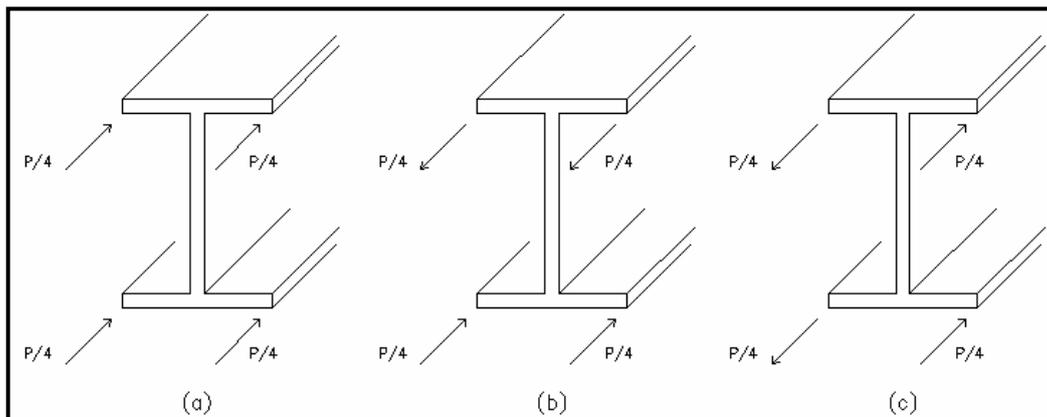
A introdução dessas grandezas é de grande significância quando da aplicação de esforços de tração, compressão, momentos torçores e/ou fletores sobre perfis em hastes de paredes delgadas, pois as tensões produzidas pelos bimotoes sobre a seção transversal dos perfis são significantes.

Utilizando-se a computação algébrica simbólica (CAS) na análise do comportamento dos perfis esbeltos dispostos na viga balcão, tornam-se possíveis a identificação de pontos influenciados pelo empenamento e o cálculo das tensões de bimomento, caracterizando a metodologia. Comparando-se as tensões de flexão e as devidas ao bimomento para diversos tipos de perfis e carregamentos externos de torção, é possível identificar os pontos que necessitam de uma intervenção, de reforço com chapas e cantoneiras de enrijecimento.

O efeito de chapa de solidarização da laje com os flanges superiores da viga balcão será desconsiderado ao longo deste estudo, ficando a análise reduzida ao tratamento do comportamento estrutural mecânico da viga balcão com os efeitos do empenamento e das solicitações de bimotoes e torções de Saint-Venant e devidas aos bimotoes.

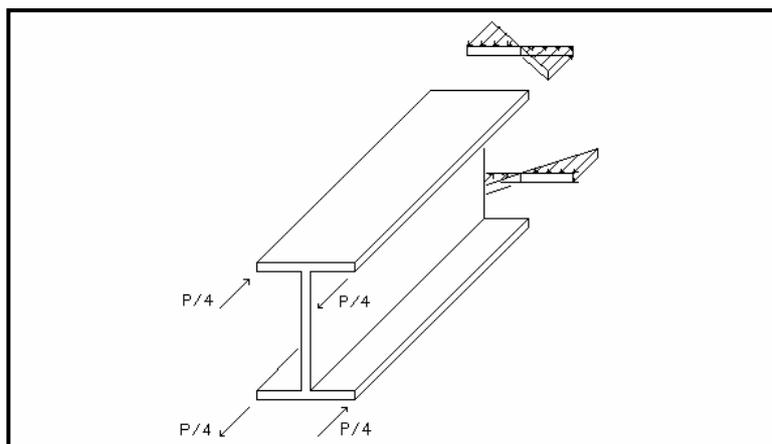
### 1 PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS E INTERPRETAÇÃO FÍSICA DOS BIMOMENTOS NOS PERFIS METÁLICOS DELGADOS

O conceito de bimomento foi apresentado por Vlasov (1961). Os desenhos das Figuras 1 e 2 mostram o seu significado físico e atuação num perfil de seção transversal  $I$  de altura constante submetido a um carregamento excêntrico  $P$ .



**Figura 1.** Possibilidades de disposição do carregamento  $P$  excêntrico na seção transversal. (Fonte: os autores)

O carregamento  $P$ , dividido em quatro parcelas, gera no caso da Figura 1a, esforços normais e, no caso das Figuras 1b e 1c esforços de flexão nas direções  $y$  e  $z$ , respectivamente. Nestes três casos são válidas a teoria clássica de vigas e a hipótese de Bernoulli, que diz que as seções transversais permanecem planas após a deformação (Megson, 1974).



**Figura 2.** Carregamento excêntrico  $P$  aplicado a um perfil I gerando empenamento da seção. (Fonte: os autores)

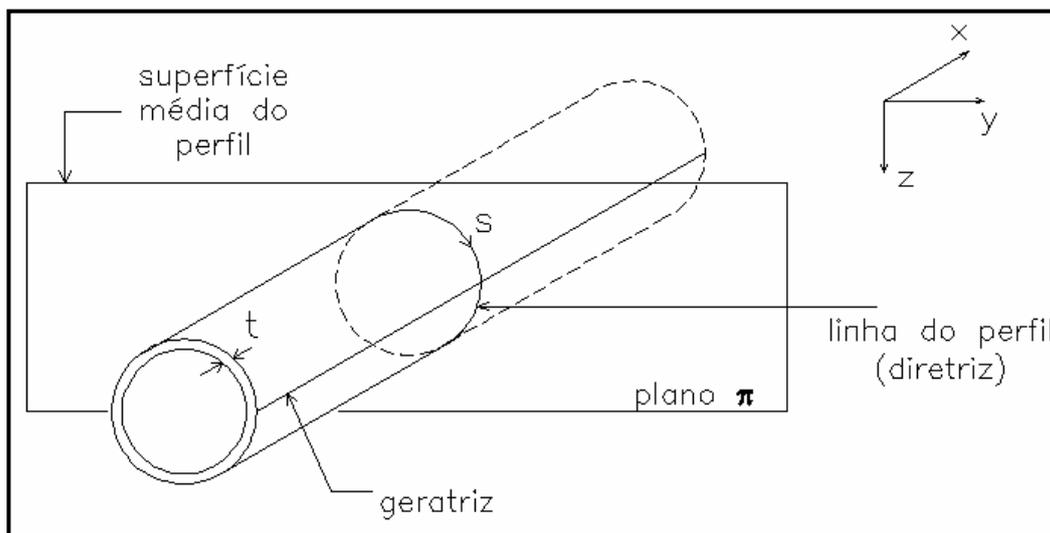
No caso da Figura 2, as quatro componentes de força  $P/4$  possuem resultante estática igual a zero. Verifica-se, ainda, que para cada seção, em cada mesa, ocorre a atuação de um momento fletor e que esses dois momentos possuem sentidos contrários acarretando uma resultante nula.

O bimomento constitui-se num esforço interno cuja resultante é nula (esforço autoequilibrado) e que conduz, neste caso, ao empenamento da seção transversal.

No estudo de perfis de hastes de paredes delgadas é conveniente a adoção de um sistema global de coordenadas retangulares  $x$ ,  $y$  e  $z$ , com origem coincidindo com o centróide  $C$  de uma das seções extremas. O sistema de orientação cartesiano é situado de maneira tal que um observador vê o eixo  $x$  entrando na folha, paralelamente ou coincidentemente (dependendo da simetria ou não da

seção transversal) ao eixo do perfil. O eixo  $z$  tem direção vertical e sentido de cima para baixo. Por fim, o eixo  $y$  forma com o sistema apresentado um triedro direto (Alves, 2003).

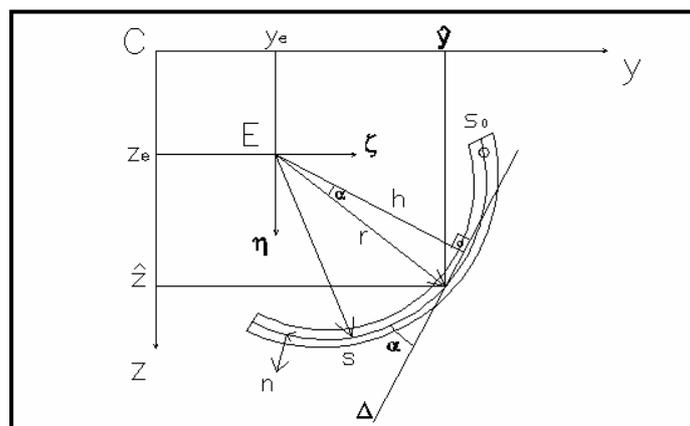
A Figura 3 ilustra a coordenada  $S$ , geratriz e diretriz de um perfil. A curva resultante da interseção do plano  $\pi$ , perpendicular à geratriz com o perfil, é denominada diretriz ou linha do perfil.



**Figura 3.** Coordenada  $S$ , geratriz e diretriz de um perfil. (Fonte: os autores)

É necessária, também, a consideração de um sistema de coordenadas ortogonais formado pelos eixos  $X$ ,  $Y$  e  $Z$ , e com origem situada no centro de cisalhamento  $E$  da seção.

Considera-se, ainda, um sistema de coordenadas curvilíneas ortogonais  $n$  e  $s$  segundo as direções normal e tangente à linha média do perfil, sendo  $s$  medido a partir de uma extremidade da seção ao longo da linha média e  $n$  é mensurado segundo a linha normal do perfil.



**Figura 4.** Sistemas de referência. (Fonte: os autores)

São referenciados:

$h$  = distância perpendicular à tangente;

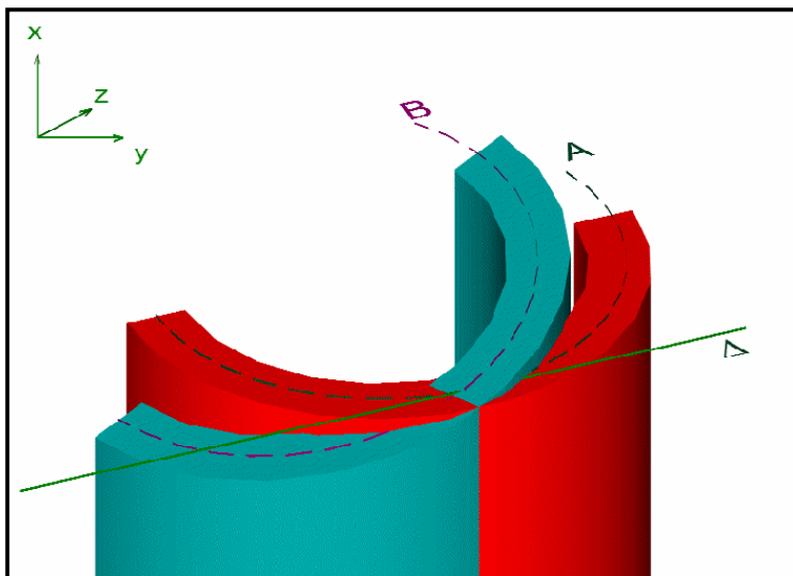


## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

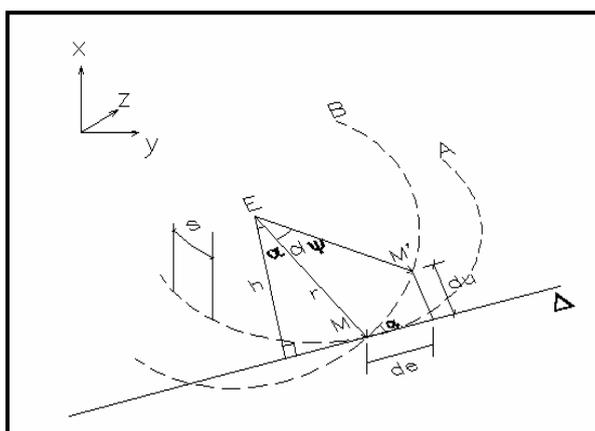
ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancler Ribeiro Alves

- $\Delta$  = tangente à seção transversal no ponto M;
- C = centróide da seção transversal;
- E = centro de cisalhamento da seção transversal;
- $S_0$  = origem setorial; neste ponto S é igual a zero.

A área setorial, ou coordenada setorial é indicada de acordo com as Figuras 5 e 6



**Figura 5.** Perfil com empenamento onde o eixo A é o original e B é o eixo empenado. (Fonte: os autores)



**Figura 6.** Perfil com empenamento. (Fonte: os autores)

São referenciados:

- h = distância perpendicular à tangente;
- $\Delta$  = tangente à diretriz da seção transversal no ponto M;
- E = centro de cisalhamento da seção transversal;
- M' = ponto correspondente a M na seção empenada;



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancleir Ribeiro Alves

de = deslocamento linear na direção da tangente;  
du = deslocamento linear na direção de x;  
dΨ = deslocamento angular elementar da seção A;  
α = ângulo que MM' forma com a tangente;  
A = linha média antes de sofrer o empenamento;  
B = linha média depois de sofrer o empenamento.

Na Figura 5, tem-se em vermelho a seção original, e, em verde, a seção empenada.

Considere-se um ponto E, localizado no centro de cisalhamento da seção transversal. Sejam, também, dois pontos distantes entre si, M e M', sendo o ponto E ligado a estes dois por raios vetores. Define-se h como sendo a distância do ponto E à reta tangente à diretriz da seção transversal no ponto M (reta Δ). Designa-se por dω o dobro da área do triângulo elementar EMM', de altura h e base de. De acordo com a Figura 6 escreve-se:

$$d\omega = h \cdot ds \quad (\text{Equação 1})$$

Integrando-se, obtém-se:

$$\omega = \int_M^{M'} h \cdot ds \quad (\text{Equação 2})$$

A Equação 2 é chamada de área setorial, cujo valor é igual ao dobro da área varrida pelo vetor EM durante sua movimentação pela linha do perfil iniciada no ponto S<sub>0</sub> (origem setorial), de coordenada S<sub>0</sub>, até um ponto S, de coordenada S, conforme Figura 4.

Vlasov (1961) introduziu novas propriedades geométricas, próprias de perfis em hastes de paredes delgadas com seção aberta, que são baseadas no conceito de área setorial, como sendo o momento setorial estático S<sub>ω</sub>, o momento setorial de inércia I<sub>ω</sub>, os produtos setoriais de inércia I<sub>ωy</sub> e I<sub>ωz</sub>.

Considerando-se que essas propriedades dependem da área setorial, tem-se que os seus valores são dependentes da posição dos pontos escolhidos para pólo e para ponto setorial inicial.

Levando-se em consideração as hipóteses simplificadoras de Vlasov (1961), a equação do empenamento é expressa por:

$$u = -\psi' \cdot \omega \quad (\text{Equação 3})$$

Considera-se atuando na seção um bimomento de flexo-torção, cuja expressão é:



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancleir Ribeiro Alves

$$M_{\omega} = \int \sigma_x \cdot \omega \cdot dA \quad (\text{Equação 4})$$

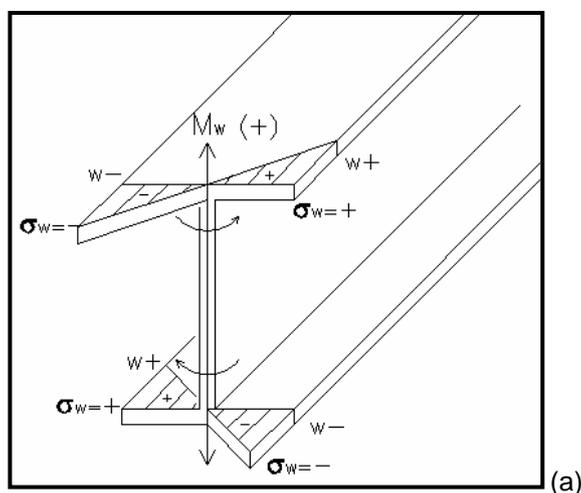
Verifica-se que o bimomento é diretamente proporcional ao momento setorial de inércia, logo:

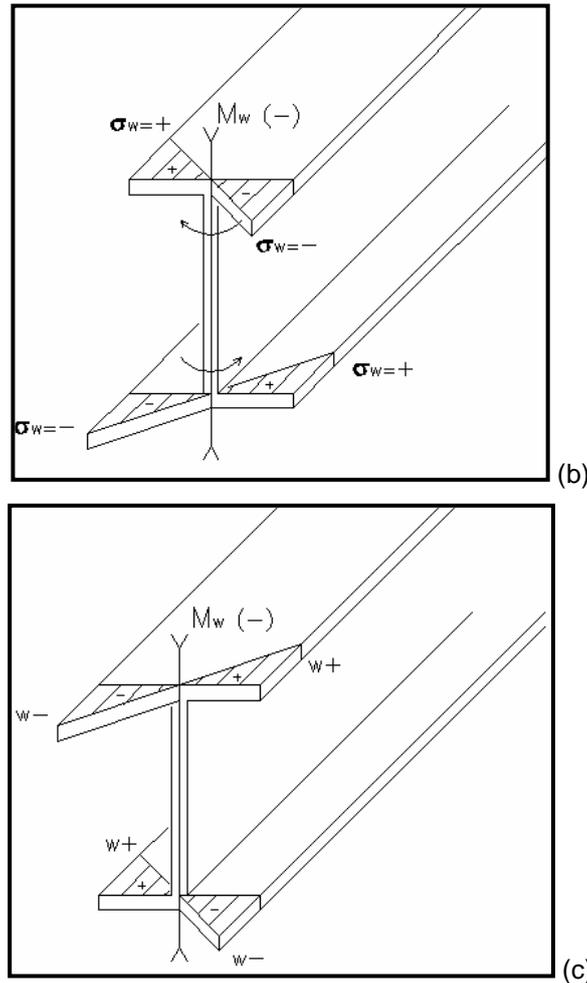
$$M_{\omega} = -E_1 \cdot \psi'' \cdot I_{\omega} \quad (\text{Equação 5})$$

O bimomento constitui-se num esforço interno independente cuja resultante é nula e que conduz ao empenamento da seção transversal, não influenciando no deslocamento do eixo da haste nem na rotação da seção transversal, sendo capaz de provocar uma tensão normal sobre o perfil, de acordo com a expressão abaixo:

$$\sigma_{\omega} = \frac{M_{\omega}}{I_{\omega}} \cdot \omega \quad (\text{Equação 6})$$

Os coeficientes de empenamento  $\omega$  e o diagrama de tensões estão ilustrados nas Figuras 7a, 7b e 7c, onde se observa a forma final simplificada do perfil após se empenar.





**Figuras 7a 7b e 7c.** (a) Diagramas de tensões e coeficientes de empenamento para bimomentos positivos; (b) diagramas de tensões para bimomentos negativos; (c) coeficientes de empenamento para bimomentos negativos. (Fonte: os autores)

Considere-se o equilíbrio de um elemento de haste de dimensões  $dx$  e  $ds$ , atuando nele a tensão normal  $\sigma$ , a tensão cisalhante  $\tau$  e a espessura do elemento  $t$ , conforme Figura 8.

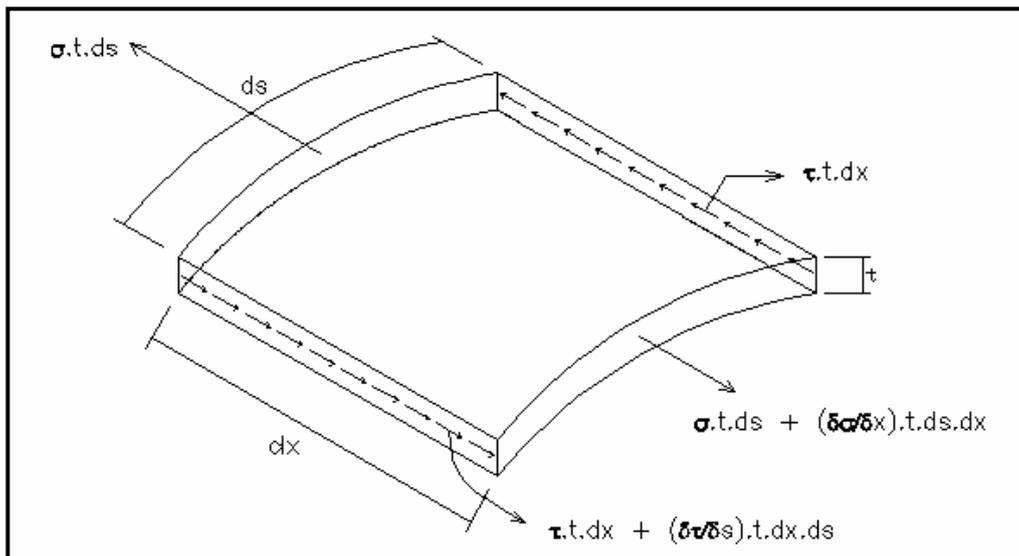


Figura 8. Elemento de haste de dimensões  $dx$  e  $ds$ . (Fonte: os autores)

Verifica-se a resultante das tensões normais

$$\sigma \cdot t \cdot ds \quad (\text{Equação 7})$$

$$\sigma \cdot t \cdot ds + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot t \cdot ds \cdot dx \quad (\text{Equação 8})$$

afastadas de  $dx$ .

Observa-se a necessidade de existência de tensões tangenciais paralelas ao eixo  $x$ , a fim de manter o equilíbrio do elemento. Portanto, tem-se:

$$\tau = -\frac{\partial M_{\omega}}{\partial x} \cdot \frac{S_{\omega}}{I_{\omega} \cdot t} \quad (\text{Equação 9})$$

De modo a promover a manutenção do equilíbrio, a tensão tangencial  $\tau$ , presente ao longo de  $dx$ , deve ser igual à tensão tangencial presente ao longo de  $ds$ . A torção de empenamento resultante é a integral dos momentos elementares:

$$T_{\omega} = \int \tau \cdot t \cdot r \cdot ds \quad (\text{Equação 10})$$

onde  $r$  é a distância do ponto considerado ao centro de cisalhamento da seção.



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancler Ribeiro Alves

A tensão tangencial originada da torção de empenamento é expressa por:

$$\tau_{\omega} = - \frac{T_{\omega}}{t} \cdot \frac{S_{\omega}}{I_{\omega}} \quad (\text{Equação 11})$$

O deslocamento angular das hastes  $\psi'$  é influenciado pela torção de Saint-Venant, sendo sua expressão escrita da forma:

$$\psi' = \frac{T_s}{G \cdot K} \quad (\text{Equação 12})$$

onde:

$T_s$  = momento torçor da torção pura;

$G$  = módulo de elasticidade transversal;

$K$  = momento de inércia à torção ( $J_T$ ).

Isolando-se  $T_s$  na expressão (12) obtém-se:

$$T_s = \psi' \cdot G \cdot K \quad (\text{Equação 13})$$

O momento torçor total que age na seção e que equilibra os esforços externos, é composto pela adição de dois outros esforços, conforme a Equação 14. Sendo a primeira parcela a torção de Saint-Venant ( $T_s$ ) e a segunda parcela a torção de empenamento ( $T_{\omega}$ ), seguindo-se:

$$T = T_s + T_{\omega} \quad (\text{Equação 14})$$

$$T = \psi' \cdot G \cdot K - E_1 \cdot \psi'''' \cdot I_{\omega} \quad (\text{Equação 15})$$

As tensões tangenciais máximas ocorrem no bordo da seção onde a tensão gerada pela torção de Saint-Venant também é máxima (Ferreira, 2004).

A tensão tangencial total é composta por três tensões, conforme a Equação 16: a tensão tangencial devida à flexão, a tensão tangencial por torção pura ou torção de Saint-Venant ( $\tau_s$ ) e a tensão tangencial por torção de empenamento ( $\tau_{\omega}$ ), sendo escrita como:

$$\tau = \tau_F + \tau_s + \tau_{\omega} \quad (\text{Equação 16})$$

onde:



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancler Ribeiro Alves

$\tau_F$  = tensão tangencial por flexão e por esforço cortante  $V$ ;

$\tau_S$  = tensão tangencial por torção pura ou torção de Saint-Venant ( $T_S$ );

$\tau_\omega$  = tensão tangencial por torção de empenamento ( $T_\omega$ ).

O comportamento dos perfis em hastes de paredes delgadas é regido pela equação diferencial (17).

$$\frac{d^4 \psi}{dx^4} - k^2 \cdot \frac{d^2 \psi}{dx^2} = -\frac{m_t}{E_1 \cdot I_\omega} \quad (\text{Equação 17})$$

A solução da equação diferencial é obtida por integrações sucessivas, fica expressa da seguinte forma, tomando-se o deslocamento angular  $\psi = \phi$ , segundo Kollbrunner (1972):

$$\phi = c_1 + c_2 \cdot x + c_3 \cdot \cosh(k \cdot x) + c_4 \cdot \sinh(k \cdot x) \quad (\text{Equação 18})$$

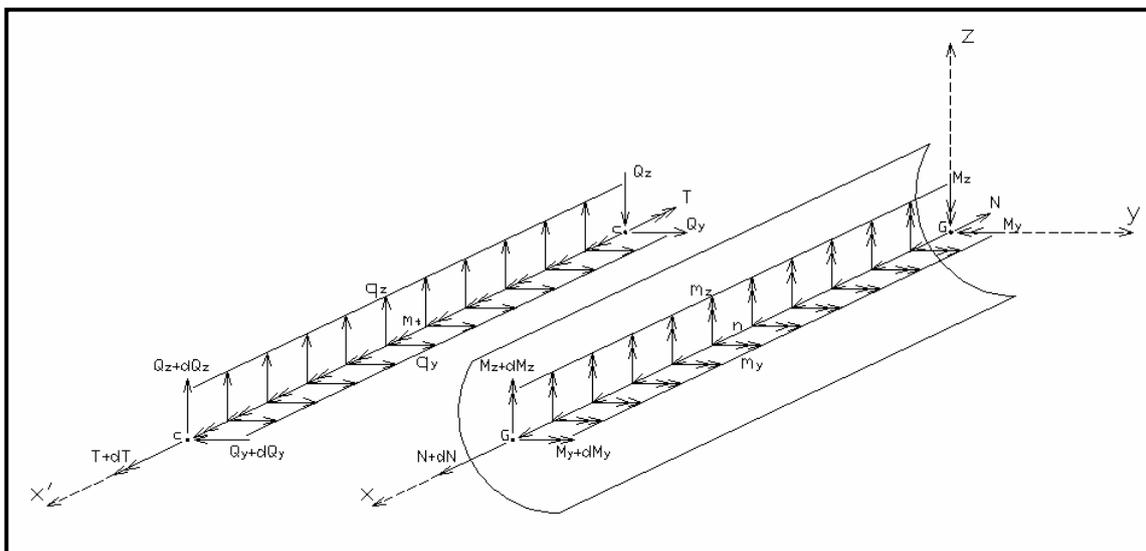
Os termos  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  e  $C_4$  são as constantes de integração e  $k$  é o comprimento característico inverso da haste. A equação diferencial (19) é denominada de “Equação Diferencial do Bimomento” (Mendes, 1993).

$$\frac{d^2 M_\omega}{dx^2} - k^2 \cdot M_\omega = m_t \quad (\text{Equação 19})$$

A solução da equação diferencial do bimomento se apresenta da seguinte forma:

$$M_\omega = c_1 \cdot \sinh(k \cdot x) + c_2 \cdot \cosh(k \cdot x) + m_1 \quad (\text{Equação 20})$$

A Figura 9 representa um perfil genérico de paredes delgadas sujeito a cargas e esforços.



**Figura 9.** Perfil de paredes delgadas submetido a cargas e esforços. (Fonte: os autores)

Os eixos  $y$  e  $z$  apresentados são eixos principais de inércia da seção. O eixo  $x$  é coincidente com o centro de gravidade  $G$  da seção transversal do perfil e o eixo  $x'$ , paralelo a  $x$ , é coincidente com o centro de cisalhamento  $C$ . Foram adotados os sentidos positivos das cargas e dos esforços.

No centro de gravidade  $G$  da seção ocorre a atuação de esforço axial  $N$  e de momentos fletores  $M_y$  e  $M_z$ , enquanto no centro de cisalhamento  $C$  ocorre a atuação de momento de torção  $T$  e de forças cortantes  $Q_y$  e  $Q_z$ . Verifica-se então, a atuação na peça de quatro estados de solicitações independentes. Os carregamentos longitudinais à flexão no plano  $xy$  e à flexão no plano  $xz$  são estados bem distintos, respeitando-se as seguintes equações de equilíbrio.

$$E \cdot A \cdot u_0'' = -N \quad (\text{Equação 21})$$

$$E \cdot I_z \cdot v^{iv} = q_y - M_z' \quad (\text{Equação 22})$$

$$E \cdot I_y \cdot w^{iv} = q_z + M_y' \quad (\text{Equação 23})$$

Sendo  $u_0$ ,  $v$  e  $w$  deslocamentos lineares do ponto  $C$  na direção dos eixos  $x$ ,  $y$  e  $z$ , respectivamente.

A obtenção das tensões totais é realizada utilizando-se as seguintes expressões:

$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z \cdot y}{I_z} + \frac{M_y \cdot y}{I_y} + \frac{M_\omega \cdot \omega}{I_\omega} \quad (\text{Equação 24})$$



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancler Ribeiro Alves

$$\tau = -\frac{Q_y \cdot E_z}{I_z \cdot t} + \frac{Q_z \cdot E_y}{I_y \cdot t} + \frac{T_s \cdot t}{K} + \frac{T_\omega \cdot E_\omega}{I_\omega \cdot t} \quad (\text{Equação 25})$$

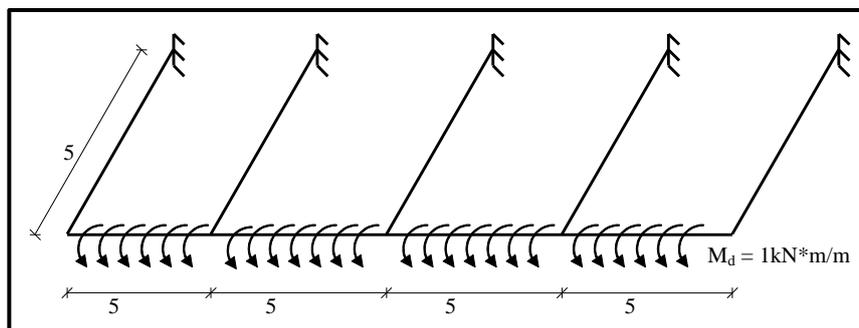
### 2 ESTRUTURA DE VIGA BALCÃO EM PERFIS DE HASTES DE PAREDES DELGADAS

O método da flexibilidade é utilizado na análise de perfis de paredes delgadas considerando-se a introdução de um grau de liberdade (empenamento da seção transversal) decorrente da solicitação do bimomento. Admite-se ainda a consideração de um carregamento do tipo torçor distribuído.

Kollbrunner e Hajdin (1972, p. 177) apresentam em tabela todo o tipo de integração segundo o Princípio dos Trabalhos Virtuais. São contemplados todos os tipos de solicitações externas e de carregamentos externos virtuais, assim como todas as condições de extremidades para os perfis.

#### 2.1 Modelo analisado

A viga balcão a ser analisada é constituída por um perfil longitudinal ligado a perfis transversais com bordos rigidamente engastados num maciço. Os elementos de barra estão dispostos de acordo com a Figura 10, sendo que os elementos longitudinais estão submetidos ao esforço de um momento torçor uniformemente distribuído  $M_d = 1 \text{ kN}\cdot\text{m}/\text{m}$ .



**Figura 10.** Viga balcão com elementos de hastes delgadas. (Fonte: os autores)

A viga balcão é constituída por perfis da classe VS (viga soldada), agrupados no Quadro 1, junto de seus correspondentes momentos de inércia em relação ao eixo  $y$  ( $I_{yy}$ ), momentos de inércia à torção ( $K$ ), momentos setoriais de inércia com polos no centro de gravidade ( $I_\omega$ ), coeficientes de empenamento ( $\omega$ ) e comprimento característico inverso ( $k$ ).

nº	Perfis VS	$I_{yy}$ (cm <sup>4</sup> )	$K$ (cm <sup>4</sup> )	$I_\omega$ (cm <sup>6</sup> )	$\omega$ (cm <sup>2</sup> )	$k$ (cm <sup>-1</sup> )
1	400 x 78	2,534 x 103	94,471	9,196 x 105	17,195	5,996 x 10 <sup>-3</sup>
2	450 x 80	2,534 x 103	94,887	1,177 x 106	19,570	5,312 x 10 <sup>-3</sup>
3	500 x 97	4,949 x 103	118,167	2,862 x 106	21,945	3,801 x 10 <sup>-3</sup>
4	550 x 100	4,949 x 103	118,584	3,489 x 106	24,320	3,449 x 10 <sup>-3</sup>



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR

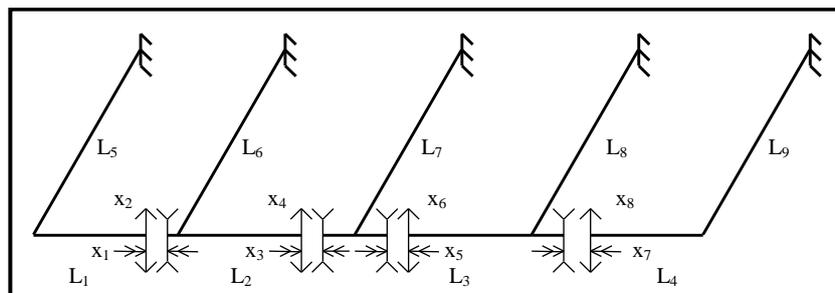
ISSN 2675-6218

ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancleir Ribeiro Alves

5	600 x 152	1,125 x 10 <sup>4</sup>	321,887	9,301 x 10 <sup>6</sup>	34,375	3,480 x 10 <sup>-3</sup>
6	650 x 155	1,125 x 10 <sup>4</sup>	322,740	1,099 x 10 <sup>7</sup>	37,500	3,206 x 10 <sup>-3</sup>
7	700 x 166	1,366 x 10 <sup>4</sup>	344,427	1,556 x 10 <sup>7</sup>	40,625	2,784 x 10 <sup>-3</sup>
8	750 x 170	1,366 x 10 <sup>4</sup>	345,280	1.795 x 10 <sup>7</sup>	43,750	2,595 x 10 <sup>-3</sup>
9	800 x 173	1,366 x 10 <sup>4</sup>	346,133	2,051 x 10 <sup>7</sup>	46,875	2,431 x 10 <sup>-3</sup>
10	850x 174	1,601 x 10 <sup>4</sup>	275,992	2,740 x 10 <sup>7</sup>	45,080	1,878 x 10 <sup>-3</sup>
11	900 x 191	1,787 x 10 <sup>4</sup>	379,090	3,420 x 10 <sup>7</sup>	53,125	1,970 x 10 <sup>-3</sup>
12	950 x 194	1,787 x 10 <sup>4</sup>	379,943	3,822 x 10 <sup>7</sup>	56,250	1,865 x 10 <sup>-3</sup>
13	1000 x 217	2,667 x 10 <sup>4</sup>	432,88	6,338 x 10 <sup>7</sup>	59,375	1,546 x 10 <sup>-3</sup>
14	1100 x 235	2,667 x 10 <sup>4</sup>	446,675	7,706 x 10 <sup>7</sup>	65,625	1,424 x 10 <sup>-3</sup>
15	1200 x 307	4,875 x 10 <sup>4</sup>	970,171	1,633 x 10 <sup>8</sup>	89,539	1,442 x 10 <sup>-3</sup>
16	1300 x 344	4,876 x 10 <sup>4</sup>	1,02 x 10 <sup>3</sup>	1,925 x 10 <sup>8</sup>	97,414	1,361 x 10 <sup>-3</sup>
17	1400 x 482	9,337 x 10 <sup>4</sup>	3,12 x 10 <sup>3</sup>	4,304 x 10 <sup>8</sup>	147,375	1,594 x 10 <sup>-3</sup>
18	1500 x 492	9,337 x 10 <sup>4</sup>	3,13 x 10 <sup>3</sup>	4,963 x 10 <sup>8</sup>	158,625	1,486 x 10 <sup>-3</sup>

**Quadro 1** - Perfis analisados com  $I_{yy}$  (cm<sup>4</sup>),  $K$  (cm<sup>4</sup>),  $I_w$  (cm<sup>6</sup>),  $\omega$  (cm<sup>2</sup>) e  $k$  (cm<sup>-1</sup>)  
(Fonte: os autores)

A partir da estrutura original e com a eliminação de vínculos, é possível a obtenção de uma estrutura isostática. A estrutura foi rompida em quatro diferentes posições, sendo considerada a atuação de oito hiperestáticos, conforme mostra a Figura 11.



**Figura 11.** Ação dos hiperestáticos nos vínculos rompidos. (Fonte: os autores)

Com a superposição de análises (equação de coerência) é possível a determinação dos hiperestáticos e dos esforços em dez diferentes pontos da estrutura, considerando-se a possibilidade da utilização de dezoito tipos de perfis.

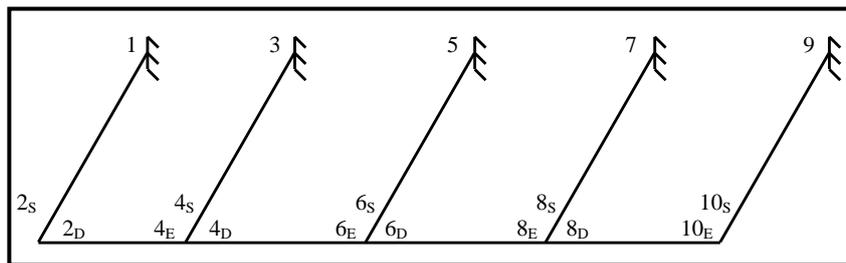


Figura 12. Pontos onde os esforços são calculados. (Fonte: os autores)

## 2.2 Esforços atuantes

A fim de exemplificar o resultado para o diagrama dos esforços atuantes (bimomentos, momentos fletores e momentos torçores) foi escolhido o perfil nº 1, VS 400 x 78, do Quadro 1.

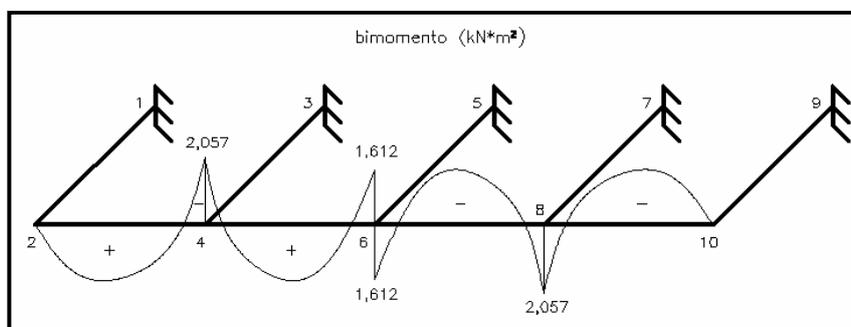


Figura 13. Diagramas de bimomentos para a viga balcão com o perfil 1 ( $\text{kN} \times \text{m}^2$ ) (Fonte: os autores)

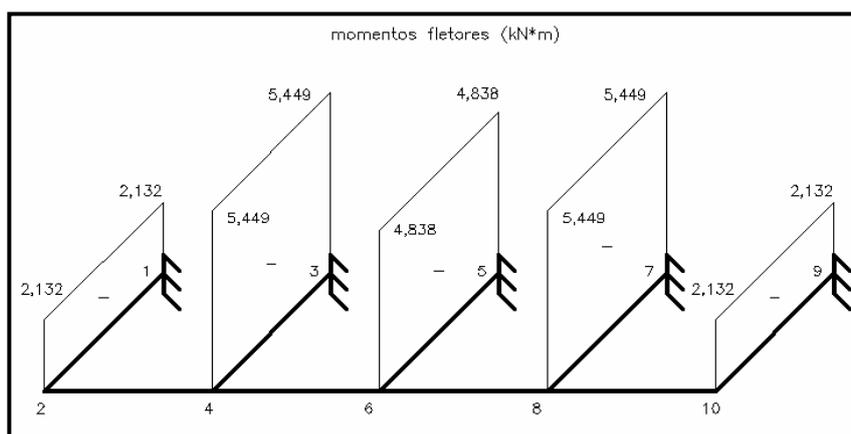
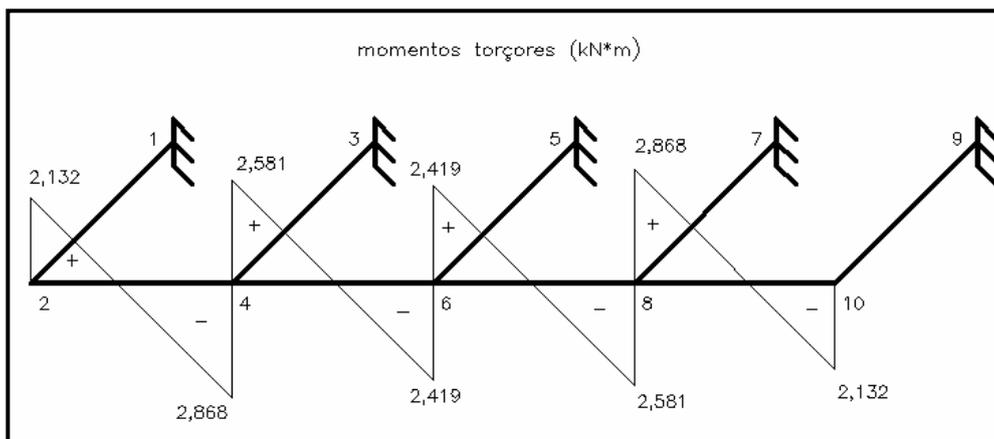


Figura 14. Diagrama de momentos fletores para a viga balcão com o perfil 1 ( $\text{kN} \times \text{m}$ ) (Fonte: os autores)



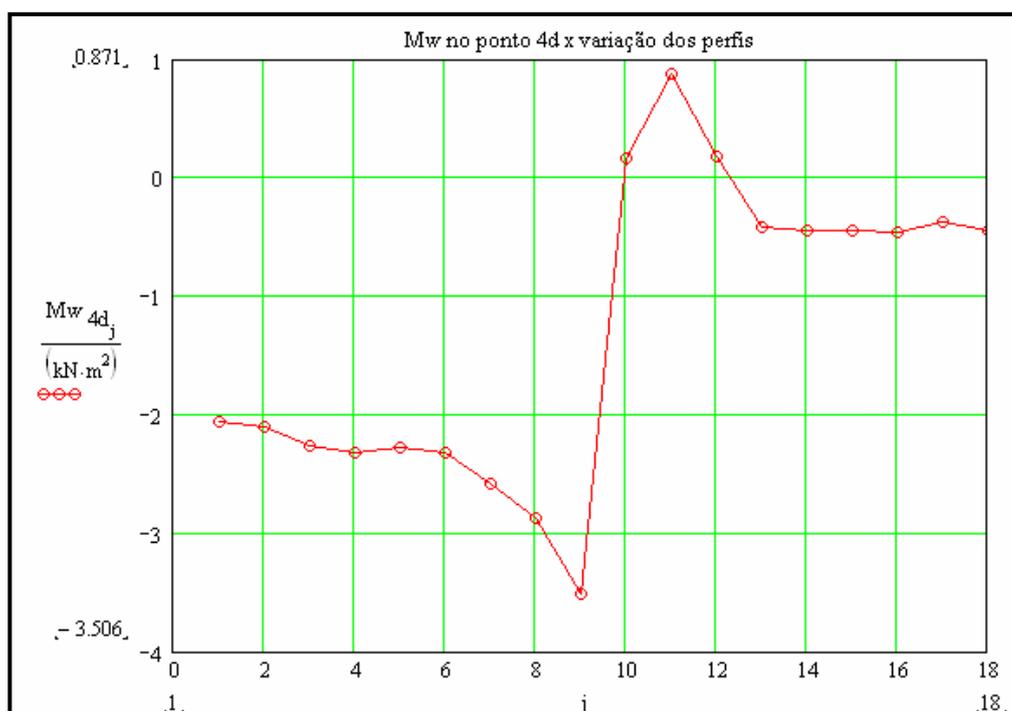
## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

ANÁLISE DE VIGAS Balcão EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancler Ribeiro Alves



**Figura 15.** Diagrama de momento torçor para a viga balcão com o perfil 1 (kN x m) (Fonte: os autores)

São representadas graficamente as evoluções dos bimomentos nas Figuras 16, 17 e 18, segundo a variação simultânea dos perfis. Os pontos escolhidos para a representação foram 4d, 6d e 8d (4 à direita, 6 à direita e 8 à direita respectivamente).

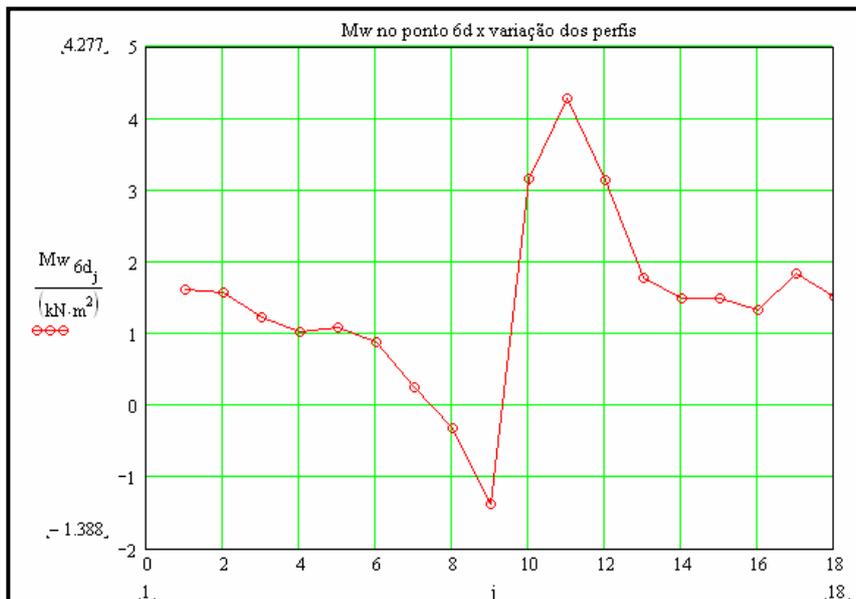


**Figuras 16.** Evolução dos bimomentos no ponto 4d com a variação dos perfis. (Fonte: os autores)

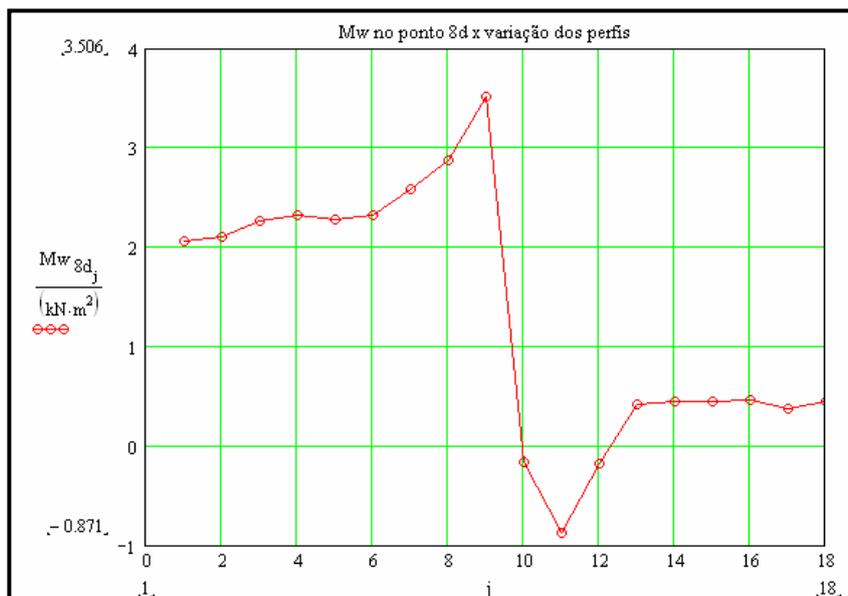


## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancler Ribeiro Alves



**Figuras 17.** Evolução do bimomento no ponto 6d com a variação dos perfis.  
(Fonte: os autores)



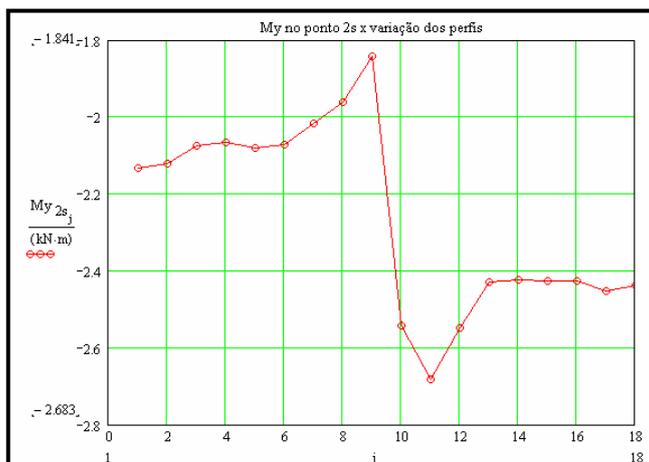
**Figura 18.** Evolução do bimomento no ponto 8d com a variação dos perfis.  
(Fonte: os autores)

Representa-se graficamente as evoluções dos momentos fletores nas Figuras 19, 20 e 21, segundo a variação simultânea dos perfis. Os pontos escolhidos para a representação foram 2s (2 superior), 4s e 6s sendo de valores idênticos aos pontos 1, 3 e 5. Como o diagrama de momentos fletores apresentado é simétrico (Figura 14), a mesma identidade gráfica se verifica nos pontos 8s e 10s.

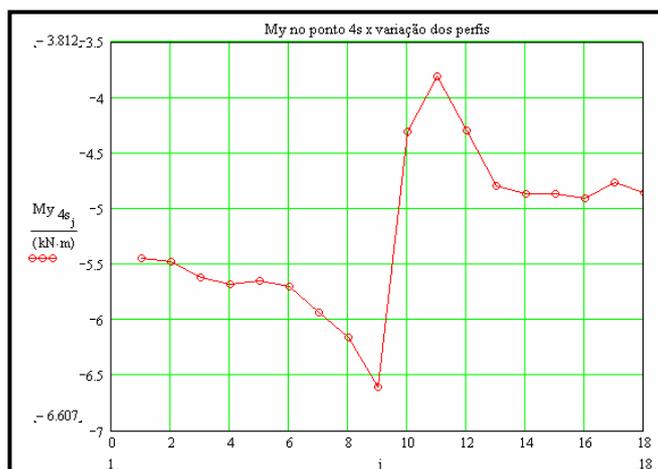


## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

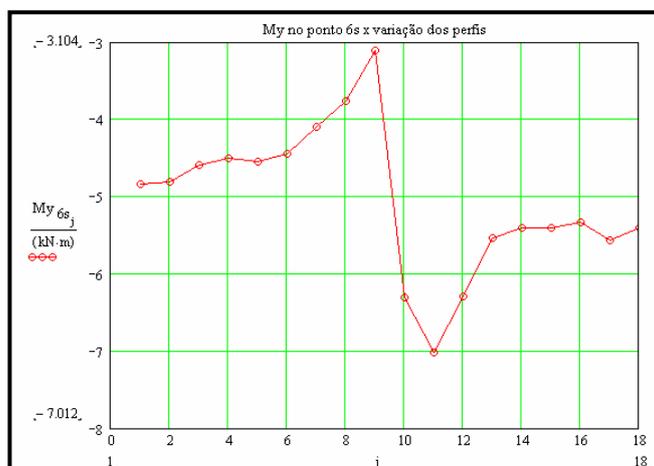
ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancler Ribeiro Alves



**Figura 19.** Evolução dos momentos fletores no ponto 2s com a variação dos perfis.  
(Fonte: os autores)



**Figura 20.** Evolução do momento fletor no ponto 4s com a variação dos perfis.  
(Fonte: os autores)



**Figura 21.** Evolução do momento fletor no ponto 6s com a variação dos perfis.  
(Fonte: os autores)

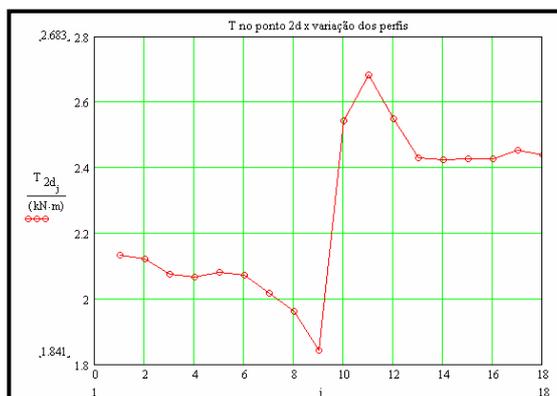


## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR

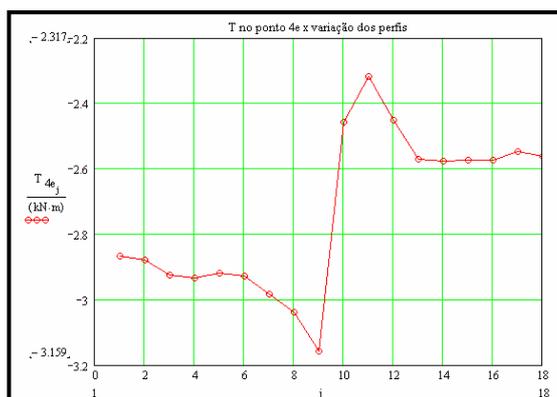
ISSN 2675-6218

ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancleir Ribeiro Alves

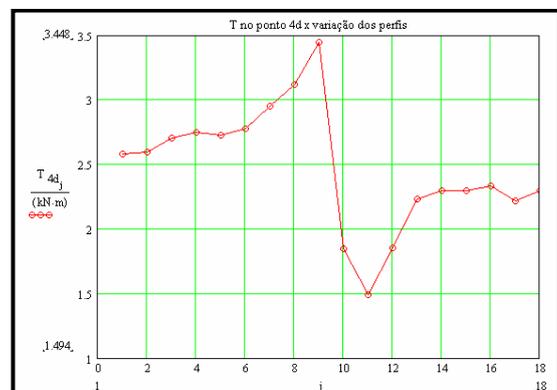
Representam-se graficamente as evoluções dos momentos torçores nas Figuras 22, 23, 24 e 25, segundo a variação simultânea dos perfis indicados no Quadro 1. Os pontos escolhidos para a representação foram 2d, 4e, 4d e 6e, sendo o diagrama de momentos torçores apresentado antissimétrico, conforme indicado na Figura 15.



**Figura 22.** Evolução do momento torçor no ponto 2d com a variação dos perfis.  
(Fonte: os autores)



**Figura 23.** Evolução do momento torçor no ponto 4e com a variação dos perfis.  
(Fonte: os autores)

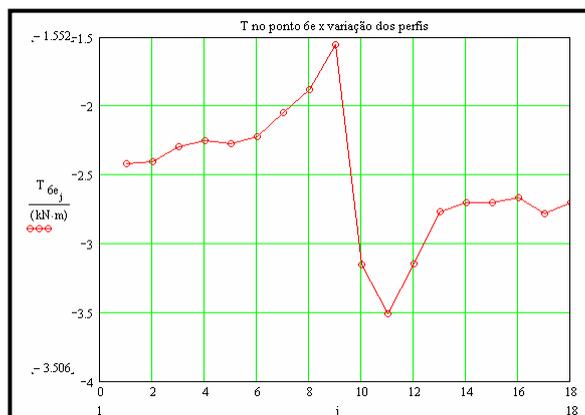


**Figura 24.** Evolução do momento torçor no ponto 4d com a variação dos perfis.  
(Fonte: os autores)



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancler Ribeiro Alves



**Figura 25.** Evolução do momento torçor no ponto 6e com a variação dos perfis.  
(Fonte: os autores)

Observa-se que os perfis 9 (VS 800 x 173) e 11 (VS 900 x 191) do Quadro 1 são os mais críticos, pois despertam esforços internos mais elevados dentro do universo dos perfis estudados.

Pelo Quadro 1, é verificado que o perfil 10 (VS 850 x 174) apresenta uma variação brusca no seu momento de inércia à torção  $K$  e no seu comprimento característico inverso  $k$ , o que pode justificar as mesmas variações ocorridas nos bimomentos e os momentos torçores para estes mesmos perfis.

Alguma variação nas espessuras dos flanges, almas ou acréscimo de comprimentos de flanges e almas podem contribuir nos cálculos de uma forma significativa na determinação de valores extremos de esforços internos.

### 2.3 Tensões atuantes

Dentro da mesma orientação de pesquisa de pontos na viga balcão que necessitam de um reforço estrutural, foram calculadas as tensões em alguns pontos da viga balcão, sendo que esses pontos foram escolhidos para a representação gráfica da evolução das tensões segundo a troca simultânea de todos os perfis.

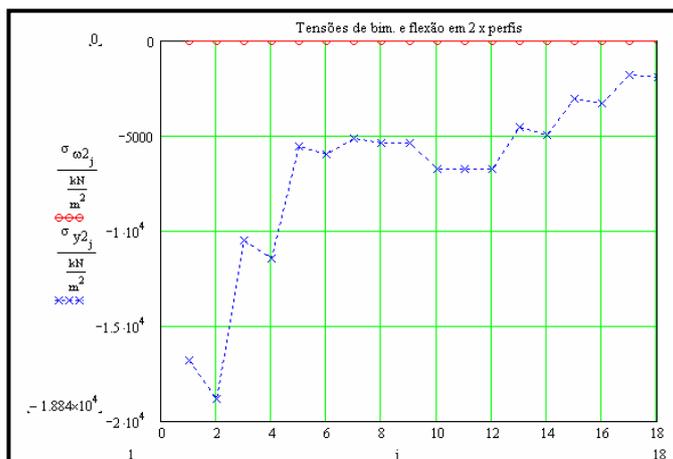
Posteriormente, verificou-se por meio de gráficos, a evolução da taxa de variação das tensões (quociente entre as tensões de bimomentos e as tensões geradas pelos momentos fletores), segundo a troca simultânea de todos os perfis a fim de se quantificar o equilíbrio entre estas tensões. Uma alta taxa deste quociente pode indicar a necessidade de inserção de chapas de reforço, de modo a combater os efeitos patológicos do empenamento.

Representam-se graficamente na Figuras 26, 27, 28, 29 e 30 as evoluções das tensões devidas aos bimomentos, segundo a variação simultânea dos perfis, sendo que os pontos escolhidos na viga balcão para a representação foram 2, 4, 6, 8 e 10, de acordo com a Figura 12.

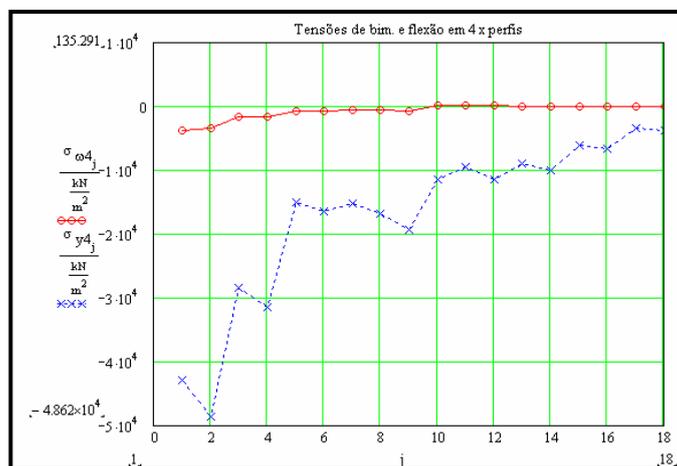


## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

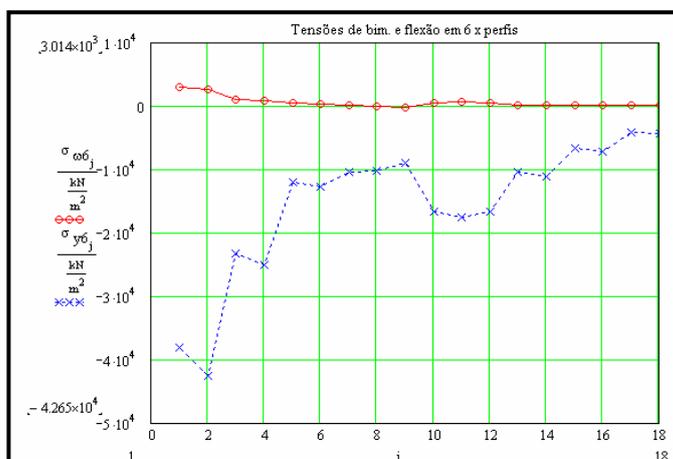
ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancler Ribeiro Alves



**Figura 26** - Evolução das tensões geradas pelo bimomento e pelo momento fletor no ponto 2 com a variação dos perfis. (Fonte: os autores)



**Figura 27** - Evolução das tensões geradas pelo bimomento e pelo momento fletor no ponto 4 com a variação dos perfis. (Fonte: os autores)

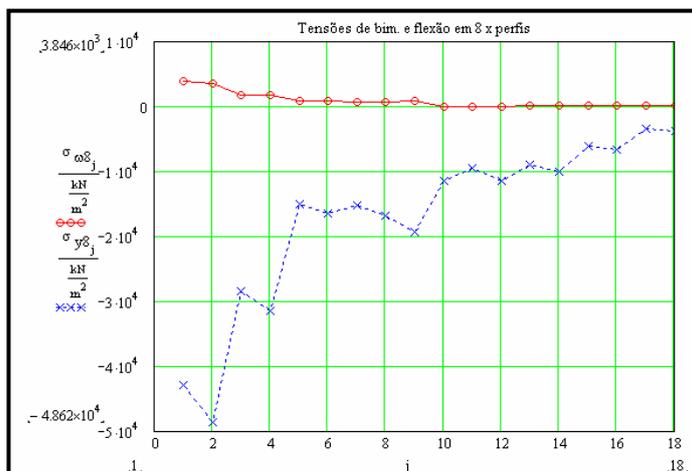


**Figura 28** - Evolução das tensões geradas pelo bimomento e pelo momento fletor no ponto 6 com a variação dos perfis. (Fonte: os autores).

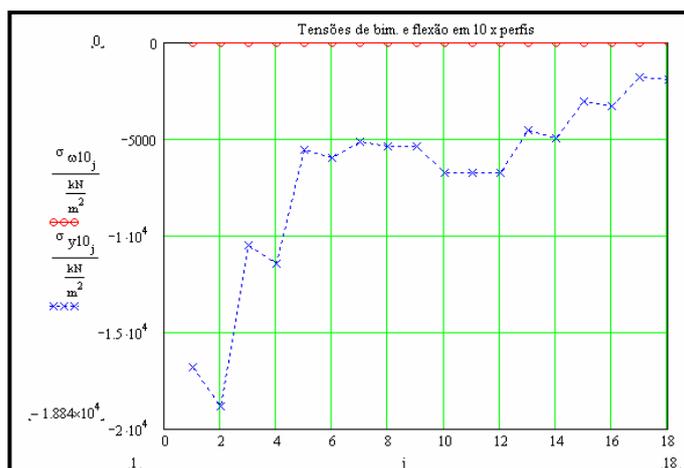


## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancler Ribeiro Alves



**Figura 29** - Evolução das tensões geradas pelo bimomento e pelo momento fletor no ponto 8 com a variação dos perfis.  
(Fonte: os autores)



**Figura 30** - Evolução das tensões geradas pelo bimomento e pelo momento fletor no ponto 10 com a variação dos perfis.  
(Fonte: os autores)

Verificam-se graficamente nas Figuras 31, 32 e 33 as evoluções da taxa de variação das tensões (quociente entre as tensões de bimomentos e as tensões geradas pelos momentos fletores) segundo a variação simultânea de todos os perfis. Os pontos escolhidos para a representação deste quociente foram 4, 6 e 8. Os pontos 2 e 10 não foram escolhidos em virtude das tensões de bimomento serem nulas nesses pontos.

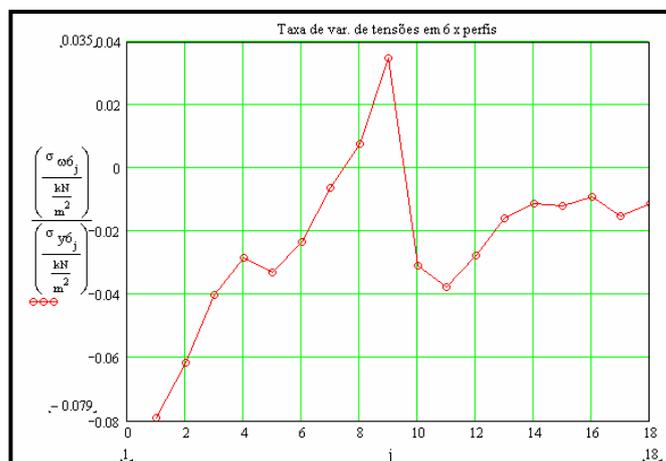


## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

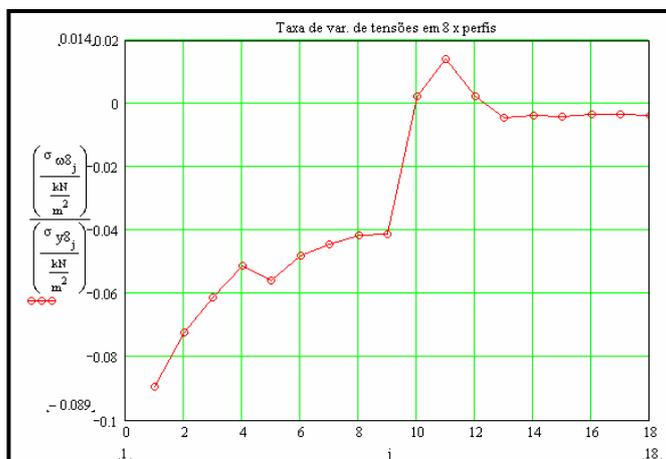
ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancler Ribeiro Alves



**Figura 31.** Evolução da taxa de variação entre as tensões no ponto 4 com a variação dos perfis.  
(Fonte: os autores)



**Figura 32.** Evolução da taxa de variação entre as tensões no ponto 6 com a variação dos perfis.  
(Fonte: os autores)



**Figura 33.** Evolução da taxa de variação entre as tensões no ponto 8 com a variação dos perfis.  
(Fonte: os autores)



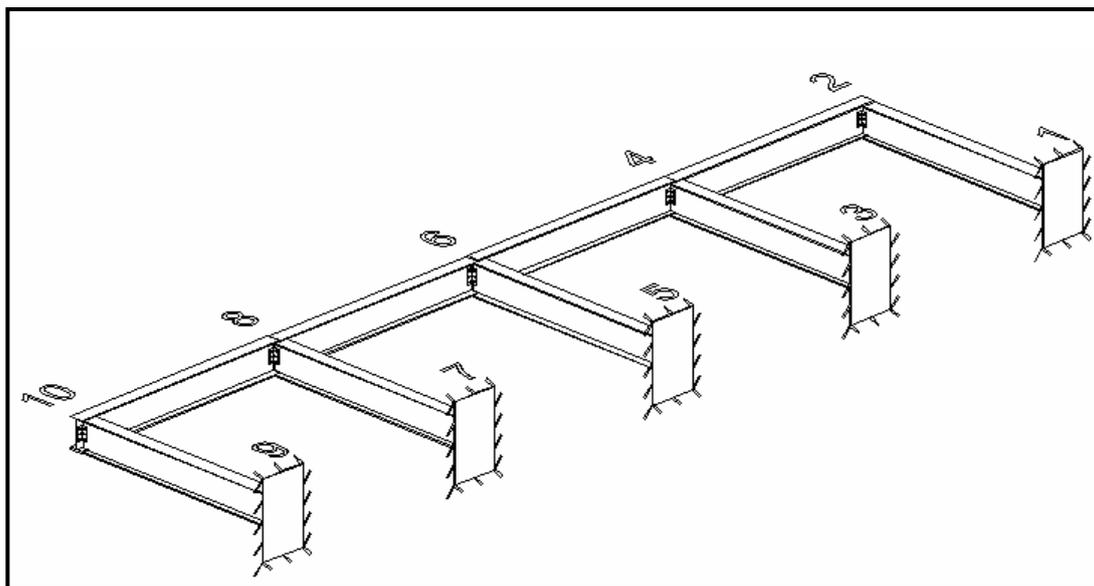
#### 2.4 Identificação dos pontos que necessitam de uma intervenção de reforço estrutural

Ao ser empregado o perfil 1 (VS 400 x 78), de acordo com o Quadro 1, talvez seja necessária a presença de cantoneiras enrijecedoras nos pontos 4 e 8 tanto à esquerda quanto à direita de cada seção da viga balcão, conforme ilustra a Figura 34, apenas de um lado.

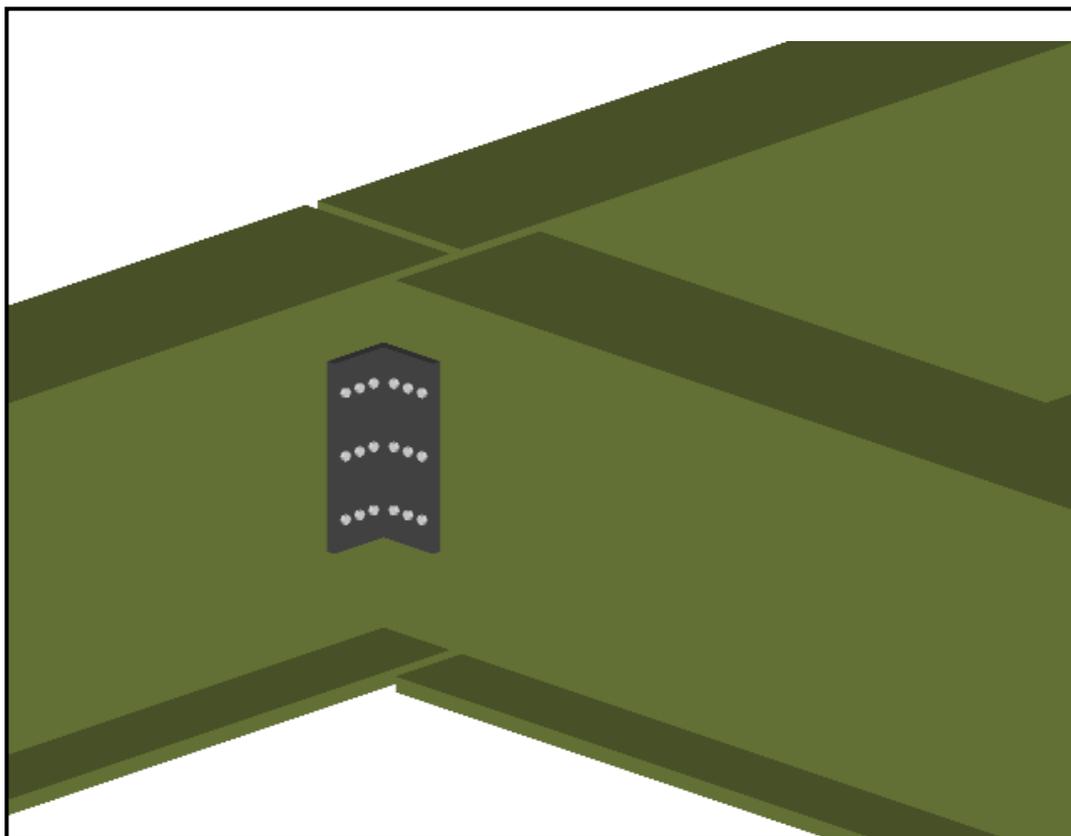
Os gráficos da Figuras 31, 32 e 33 indicam os quocientes máximos positivos e negativos, por serem menores os momentos de inércia à flexão. Entretanto, o perfil 11 (VS 900 x 191) não apresenta valores dos coeficientes de tensões tão extremos assim, indicando que os pontos 4 e 8 não necessitam de reforço estrutural.

O ponto 6, que é o ponto central e de simetria da viga balcão, conforme se observa na Figura 34, continua a ser mais problemático para o emprego do perfil 1 (VS 400 x 78), uma vez que o valor para o quociente de tensões é o mais crítico dentre todos os perfis analisados.

Neste ponto também se recomenda o emprego de cantoneiras enrijecedoras conforme indicadas na Figura 35, em ambos os lados da seção, para se combater o efeito patológico do empenamento que, dentro do âmbito das rotações moderadas, pode se apresentar significativo para as dimensões do perfil empregado e carregamento torsional imposto.



**Figura 34.** Seções de estudo da viga balcão mostrando que o ponto 6 é o mais problemático. (Fonte: os autores)



**Figura 35.** Cantoneira de enrijecimento nos pontos nodais problemáticos da viga balcão corrigindo a patologia de empenamento. (Fonte: os autores)

### 3 CONSIDERAÇÕES

Observou-se que com o acréscimo do momento setorial de inércia, houve um decréscimo gradativo em módulo nas mesmas proporções das tensões devidas aos bimomentos, mesmo levando a interferência do coeficiente de empenamento, parâmetro principal do tipo da patologia em estudo sobre vigas balcão.

Como muitos parâmetros são envolvidos na quantificação da patologia do empenamento em estruturas metálicas, cada efeito de solicitação não pode ser analisado em separado, pois gerariam interpretações nos resultados não condizentes com a realidade do problema.

Na análise das tensões de flexão, cada ponto da viga balcão apresentou um comportamento singular com valores bem distintos para cada perfil estudado. Verificou-se também que as tensões de flexão decrescem mais rapidamente que as tensões devidas ao bimomento e que a contribuição do momento torçor uniformemente distribuído é bem diferente entre os pontos intermediários e os pontos extremos da viga balcão.

Tais investigações podem ser comparadas com os programas de modelagem computacional com o objetivo de se assegurar que os elementos estruturais escolhidos são os adequados para absorver os esforços solicitantes na viga balcão, de modo a consolidar um projeto o mais otimizado



## RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

ANÁLISE DE VIGAS BALCÃO EM ESTRUTURAS METÁLICAS EM HASTES DELGADAS  
Luiz Carlos Mendes, Vancler Ribeiro Alves

possível, prevendo-se os pontos que necessitam de um reforço estrutural compatível com a realidade das tensões e deformações.

### REFERÊNCIAS

ALVES, Vancler Ribeiro. **Análise de elementos estruturais em hastes de paredes delgadas**. 2003. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - UFF, Niterói, 2003.

ALVES, Vancler Ribeiro. **Análise de perfis enrijecidos em hastes de paredes delgadas de aço formados a frio**. 2008. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) - UFF, Niterói, 2008.

ATTARD, Mário M. **Lateral buckling analysis of beams by the FEM: Computers & Structures**. Oxford, England: Pergamon Press Ltd, 1996.

FERREIRA, Rondiney Bonin. **Análise de viga balcão em elementos estruturais de hastes de paredes delgadas**. 2004. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – UFF, Niterói, 2004.

KOLLBRUNNER, C. F.; BASLER, K. **Torsion in structures – An Engineering Approach**. Berlin; New York: Springer Verlag, 1969.

KOLLBRUNNER, C. F.; HAJDIN, N. **Dünnwandige Stäbe – Band 1**, Berlin: Springer Verlag, 1972.

KOLLBRUNNER, C. F.; HAJDIN, N.; KAJCINOVIC D. **Matrix analysis of thin-walled structures**. Zurich: Institute for Engineering Research, Verlag, 1969.

MEGSON, T. H. G. **Linear analysis of thin walled elastic structures**. New York: Surrey University Press, 1974.

MENDES, Luiz Carlos. **Análise de grelhas em hastes de paredes delgadas sujeitas a bimomentos**. 1993. Tese (Doutorado em Ciências de Engenharia Civil) – COPPE/UFRJ, Rio de Janeiro, 1993.

SCHULZ, Mauro; FILLIPOU, Filip C. Generalized warping torsion formulation. **Journal of Engineering Mechanics**, v. 124, n. 3, mar. 1998.

SILVA, Márcio Andrade da. **Flambagem de perfis de aço de paredes delgadas e seção aberta**. 2001. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – UFF, Niterói, 2001.

VLASOV, V. Z. **Thin-walled elastic beams**. Jerusalém, Israel: Program for Scientific Translations Ltd., 1961.

ZBIROHOWSKI-KOSCIA, K. F. Stress Analysis of Cracked Reinforced and Prestressed Concret Thin-Walled Beams and Shells. **Magazine of Concrete**, v. 20, n. 65, dez. 1968.

ZBIROHOWSKI-KOSCIA, K. **Thin Walled beams**. London: Crosby Lockwook and Son Ltd., 1967.