RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

POSSÍVEL MÉTODO PARA ENUMERAÇÃO DE ELEMENTOS BINÁRIOS

POSSIBLE METHOD FOR ENUMERATION OF BINARY ELEMENTS

MÉTODO POSIBLE PARA LA ENUMERACIÓN DE ELEMENTOS BINARIOS

Gabriel Barbosa Domingos[1]

e311062
https://doi.org/10.47820/recima21.v3i1.1062

RESUMO
Um dos métodos utilizados para identificar quais sequências correspondem em bijeção com o conjunto dos Naturais é a Diagonalização, originalmente desenvolvido pelo matemático Georg Cantor. A Diagonalização comumente é considerada como prova, demonstra que o conjunto dos Binários não é enumerável e que a cardinalidade dos Binários e dos Naturais são diferentes. Entretanto neste trabalho é apontado os indícios de um meio de se estabelecer relação de um para um entre elementos Binários e elementos dos Naturais, para tal feito é utilizado princípio da boa ordem, análise combinatória e teoria de conjuntos. Foram estabelecidas duas demonstrações, na primeira foi considerada relevante a quantidade de casas que definem um elemento binário bem como o valor associado, na segunda demonstração foi considerado relevante apenas o valor associado. Nas duas demonstrações atingiu-se a enumeração dos binários. Tais resultados poderiam representar um novo método para enumerar sequências binárias e possivelmente as demais sequências infinitas. Os conjuntos dos Racionais e Naturais também foram estudadas por meio deste método.

PALAVRAS-CHAVE: Combinatória. Diagonalização. Boa ordenação. Sequências. Enumerabilidade

ABSTRACT
One of the methods used to identify which sequences correspond in bijection with the set of Naturals is the Diagonalization, originally developed by the mathematician George Cantor. Diagonalization is commonly considered as proof, demonstrates that set of Binaries is not numerable and that the cardinality of Binaries and Naturals are different. However, in this work, the indications of a means of establishing a relationship between Binary elements and elements of the Naturals are pointed out, for this feat is used principle of good order, combinatorial analysis and theory of sets. Two statements were established, in the first it was considered relevant the number of houses that define a binary element as well as the associated value, in the second statement, only the associated value was considered relevant. In both statements, the enumeration of binaries was reached. Such results could represent a new method for enumerating binary sequences and possibly the other infinite sequences. The sets of Rational and Natural were also studied using this method.

KEYWORDS: *Combinatorial. Diagonalization. Good ordination. Sequences. Enumerability*

RESUMEN
Uno de los métodos utilizados para identificar qué secuencias se corresponden en bijeção con el conjunto de Naturales es la Diagonalización, desarrollada originalmente por el matemático Georg Cantor. La diagonalización se considera comúnmente como prueba, demuestra que el conjunto de binarios no es numerable y que la cardinalidad de binarios y naturales es diferente. Sin embargo, en este trabajo, se señalan las indicaciones de un medio para establecer una relación entre los elementos binarios y los elementos de los Naturales, para esta hazaña se utiliza el principio de buen orden, el análisis combinatorio y la teoría de conjuntos. Se establecieron dos enunciados, en el primero se consideró relevante el número de viviendas que definen un elemento binario así como el valor asociado, en el segundo enunciado solo se consideró relevante el valor asociado. En ambas declaraciones, se alcanzó la enumeración de binarios. Tales resultados podrían representar un nuevo método para enumerar secuencias binarias y posiblemente las otras secuencias infinitas. Los conjuntos de Racional y Natural también se estudiaron utilizando este método.

PALABRAS CLAVE: *Combinatoria. Diagonalización. Buena ordenación. Secuencias. Enumerabilidad*

[1] Centro Universitário Campo Limpo Paulista - Unifaccamp

INTRODUÇÃO

Problematização: Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor foi um matemático que trabalhou com a análise e teoria de conjuntos, bem como as próprias sequências de extensão infinita, as definições de conjunto enumerável e não enumerável deve-se ao seu trabalho. Um dos principais argumentos que ele desenvolveu para verificar se um conjunto é enumerável é a sua famosa prova da diagonal, ou Diagonalização que indica se há ou não a correspondência bijetora com os Naturais, todavia pode haver uma maneira de estabelecer tal relação, através do uso combinado de específicos processos matemáticos.

Justificativa: Promover evolução da área através da correção, melhoria ou reafirmação de procedimentos antigos com o desenvolvimento de novas abordagens. Inclusive neste trabalho se utiliza muito da análise combinatória, que é uma ferramenta da matemática que foi largamente desenvolvida após a época de Georg Cantor e que, portanto, não teria incluído em suas pesquisas.

Objetivo principal: Testar os resultados obtidos pelo método da Diagonalização para o conjunto dos Racionais e para sequências Binárias, para isso se fará uso combinado de teoria de conjuntos, princípio da boa ordem e análise combinatória.

Objetivo específico: Demonstrar uma possível forma de enumeração entre diferentes conjuntos e sequências que faz uso da teoria de conjuntos, princípio da boa ordem e análise combinatória.

Detalhamento: É iniciada a divisão de um conjunto principal em subconjuntos, usa-se arranjos de repetição para determinar as possibilidades de elementos diferentes, e é verificada a bijeção com o conjunto dos Naturais aplicando o princípio da boa ordem. A prática de construção de tais subconjuntos pode estender-se infinitamente e logo torna-se possível por este novo método estabelecer enumeração para conjuntos e sequências infinitas.

1 MÉTODOS E PROCESSOS

DEFINIÇÕES E BASE

CONJUNTOS NUMÉRICOS

Foram consideradas importantes para este trabalho as definições dos conjuntos Naturais, Inteiros e Racionais, respectivamente para $\mathbb{N}, \mathbb{Z}\ e\ \mathbb{Q}$. Baseado em Iezzi e Murakami. (1977, p. 39-A - 43-A) tem-se:

$$\mathbb{N} = \{0,1,2,3,4 \dots\}$$

Identifique que a configuração de tal é de 1 adicionado ao anterior e estende-se ao infinito.

$$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3 \dots\}$$

$$\mathbb{Z}_{+} = \{0, 1, 2, 3 \dots\} = \mathbb{N}$$

$$\mathbb{Z}_{-} = \{0, -1, -2, -3 \dots\}$$

$$\mathbb{Z}_{*} = \{\dots - 3, -2, -1, 1, 2, 3 \dots\}$$

É mostrado os conjuntos dos inteiros pode ser dado com valores negativos e zero, sem valores negativos e com o zero e nesse caso é equivalente ao conjunto dos Naturais, na forma de valores negativos com zero e ainda negativos e positivos sem valor nulo.

$$\mathbb{Q} = \{a/b |\ a \epsilon \mathbb{Z}\ ; b \epsilon \mathbb{Z}_*\}$$

Os racionais podem ser descritos na forma acima, onde há restrição para impossibilidade de haver zero para o denominador.

SEQUÊNCIAS

Baseado em Iezzi e Hazzan (1977, p. 1-D - 2-D) considere que por função é gerado um conjunto *Y* de um primeiro conjunto *X*. Para *Y* atribuímos o nome de conjunto imagem ou sequência.

Exemplo 1: Para a sequência finita tome o conjunto $N_n = \{1, 2, 3 \ldots n\}$ pode ser formulado f para gerar valores pares $PA = \{2,4,6 \ldots pa_n\}$. (Figura 1).

Figura 1 – Sequência dos Pares a partir dos Naturais.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & i & \cdots & n \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots & \downarrow \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & pa_i & \cdots & pa_n \end{array}$$

Galeria do autor

Onde a função geradora pode ser descrita na forma: $pa_n = 2n$. O valor i entre 1 e n, especificamente tem-se $1 \leq i \leq n$.

Exemplo 2: Para a sequência infinita considere o conjunto $\mathbb{N}$ que é aplicado a f para gerar uma sequência de PA. (Figura 2).

Figura 2 – Sequência infinita de Pares

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & i & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \cdots \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & pa_i & \cdots \end{array}$$

Fonte: Galeria do Autor.

Verifique que apesar da função se manter, o valor i não é menor ou igual a n, o intervalo está aberto. Neste caso interpreta-se que todo $i \in N$ está relacionado com um $pa_i \in PA$.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

ENUMERABILIDADE

Segundo Araujo et al. (2020, p. 6) define-se: “Um conjunto é enumerável se, e somente se, for um conjunto finito ou estiver em correspondência um-a-um (bijetora) com o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais”. Baseado em tal definição constrói-se o exemplo:

Exemplo 3: Considere os elementos de X, que são $x_1, x_2, x_3 \ldots x_i \ldots$ é possível a enumerabilidade deles se houver a correspondência um-a-um com os elementos do conjunto $\mathbb{N}$. (Figura 3)

Figura 3 – Bijeção entre X e $\mathbb{N}$.

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3 & \cdots & i & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ x_1, & x_2, & x_3 & \cdots & x_i & \cdots \end{array}$$

Fonte: Galeria do Autor

PRINCÍPIO DA BOA ORDEM

Por Santos (1998, p. 187) “Todo conjunto não-vazio de inteiros positivos contém um elemento mínimo.” Com base nessa definição pode-se gerar os exemplos:

Exemplo 4: Bijeção sem o princípio da boa ordem (Figura 4).

Figura 4 – Tomando a sequência PA sem boa ordem.

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 1, & 3 & \cdots & i & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 4, & 2, & 6 & \cdots & pa_i & \cdots \end{array}$$

Fonte: Galeria do Autor.

Exemplo 5: Bijeção com o princípio da boa ordem (Figura 5).

Figura 5 - Sequência PA com boa ordem.

$$\begin{array}{cccccc} 1, & 2, & 3 & \cdots & i & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2, & 4, & 6 & \cdots & pa_i & \cdots \end{array}$$

Fonte: Galeria do Autor.

Vale notar que na sequência PA pode-se considerar que seu elemento mínimo é 0 e nesse caso o elemento mínimo dos $\mathbb{N}$ também é 0. Entretanto com conveniência utiliza-se 2 como elemento mínimo de PA e por sua vez o menor valor de inteiro positivo correspondente em $\mathbb{N}$ é 1. Em qualquer dos casos é satisfeita a bijeção que preza pela regra $2i = pa_i$ onde $i \in \mathbb{N}$.

ARRANJOS

Utilizaremos da análise combinatória a organização de elementos na forma de arranjos com repetição. Baseado no texto de Hazzan (2013, p. 15-16).

Existe um conjunto de caracteres, *C,* que induzirá as possibilidades que podem ocupar apenas uma casa ou um dígito de uma informação, essa quantidade é multiplicada por si mesma até um limite, este limite pode ser a quantidade de dígitos para descrever um valor ou a quantidade de letras para descrever uma palavra.

$$C = \{c_1, c_2, c_3 \dots c_n\}$$

$$n.n \dots n = n^r$$

Onde r refere-se à quantidade de vezes que os caracteres podem ser inseridos até descrever a informação, isto é com letras, números ou números e letras.

Exemplo 6: Tome o conjunto $Pa_4 = \{2,4,6,8\}$, qual é o número de formas que os de elementos de Pa_4 podem ser organizados para obter um valor de no máximo 4 dígitos?

2684, 6822, 6622, 2866...

Note a possibilidade de quatro números distintos para ocupar o primeiro dígito desse valor de 4, há também quatro possiblidades para ocupar o segundo valor, logo *n*=4 e *r*=4, que totalizará os valores possíveis escritos com 4 dígitos utilizando os números de Pa_4, 4^4 ou 256 valores diferentes.

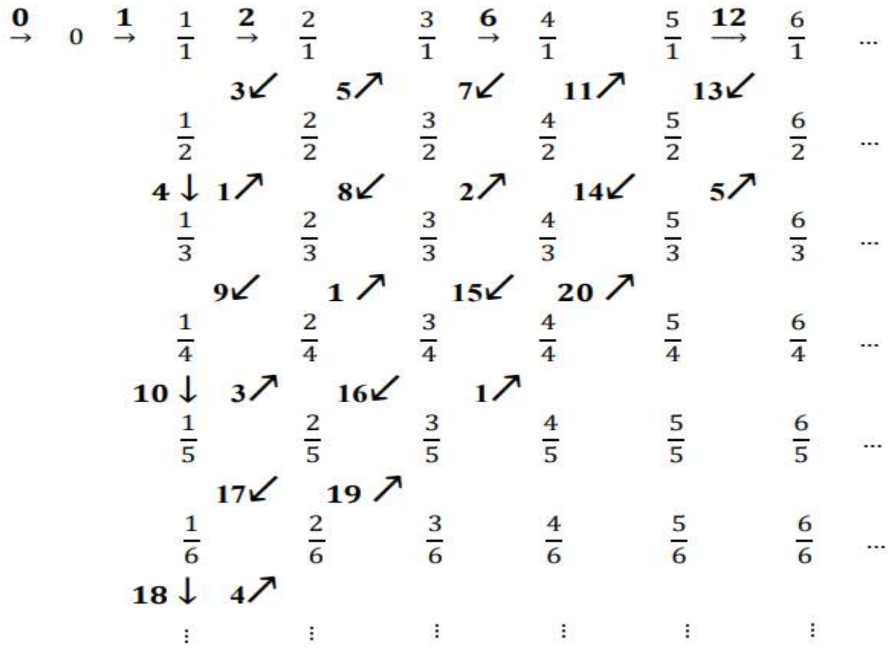
DIAGONALIZAÇÃO PARA O CONJUNTO DOS RACIONAIS

Verificando o trabalho de Araujo et al. (2020, p. 7) identifica-se o método da Diagonalização como meio de prova que o conjunto Q é enumerável.

Para a demonstração, inicialmente lista-se uma matriz de frações onde pretende-se contabilizar todas. A primeira linha possuirá todos os possíveis numeradores com o denominador 1, a segunda todos os possíveis numeradores com o denominador 2 e assim por diante. Assumimos então que esta matriz de extensões infinitas possui todas as possibilidades de valores Q (Figura 6).

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Figura 6 - Diagonalização com valores Q.



Fonte: Imagem original de Araujo et al. (2020, p. 7).

Através das setas diagonais que percorrem a matriz entre linhas e colunas é possível estabelecer a relação um-a-um entre Racionais e Naturais. O elemento do conjunto dos Naturais está representado com destaque próximo da seta.

DIAGONALIZAÇÃO PARA O CONJUNTO DOS BINÁRIOS

Com base no trabalho de Assunção et al. (2020, p. 13-14) será estabelecia uma matriz com os dígitos binários, 0 e 1, cada elemento binário distinto será t e os dígitos que o formam ocuparão toda a extensão de uma linha, as linhas serão respectivas para cada elemento binário, como t_1 que pode ser preenchido por uma quantidade infinita de 0. Logo o primeiro elemento binário e por consequência a primeira linha da matriz será constituída somente de zeros. A segunda linha terá uma combinação de dígitos diferente da anterior e assim por diante até t_k que é um elemento binário que pode ser composto apenas por valores um. Qualquer elemento t com seus dígitos na matriz, exposta a seguir, tem finalidade explicativa, o método da Diagonalização independe de como são compostos os elementos binários (Figura 7).

Figura 7 - Diagonalização com valores Binários.

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
t_1 & = & \mathbf{0} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
t_2 & = & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\
t_3 & = & 0 & 1 & \mathbf{1} & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & \cdots \\
t_4 & = & 1 & 1 & 0 & \mathbf{0} & 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\
t_5 & = & 0 & 0 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 & 0 & \cdots \\
t_6 & = & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & 0 & \cdots \\
t_7 & = & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{0} & 1 & \cdots \\
t_8 & = & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & \mathbf{1} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\
t_k & = & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \cdots
\end{array}
$$

Fonte: Galeria do autor

Pode-se desenvolver um novo elemento que não é considerado pela matriz. Pelo método da Diagonalização demonstrado na Figura 6, pode-se identificar que os valores existentes na diagonal principal são equivalentes entre si. Se forem trocados de posição entre si não produzirão um efeito diferente na enumeração, todas as frações desta diagonal principal são equivalentes a um. Agora ao analisar a Figura 7 pela mesma ótica deve-se substituir da diagonal principal cada 0 por 1 e cada 1 por 0, na prática isso apenas trocaria os valores nas posições existentes na diagonal principal. Os valores trocados geraram um novo elemento binário, que não está na matriz, verifica-se:

$$t_d = 11010110 \ldots$$

t_d é o elemento de divergência e ele não está na matriz da Figura 7.

O primeiro dígito de t_d é diferente do primeiro dígito de t_1 e, portanto, não são equivalentes. Os dígitos de t_d não podem ocupar a linha t_2, pois o segundo dígito da segunda linha é diferente do segundo dígito de t_d. Ao seguir a lógica nota-se que t_d não pode ser correspondente com nenhuma linha já listada e por consequência t_d não é um elemento considerado da matriz na Figura 7. Devido a essa falta de correspondência não é possível estabelecer o mesmo padrão de setas diagonais, como mostrado na Figura 6 e isso por si só representaria a diferença de cardinalidade entre o conjunto dos Naturais e dos binários, devido à ausência da bijeção.

Todas as definições e métodos mostrados até aqui serão utilizados ou darão base para a parte seguinte.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

2 CONJUNTOS, COMBINATÓRIA E BOA ORDEM PARA ENUMERAÇÃO DE ELEMENTOS

ANÁLISE COM OS NATURAIS

Para interpretar com maior clareza o método que pode ser utilizado para enumerar elementos racionais e binários haverá uma introdução com os Naturais.

Considere o conjunto R que possui subconjuntos r. Na forma:

$$R = \{r_1, r_2, r_3 \dots r_i \dots\}$$

Cada subconjunto possui por sua vez seus próprios elementos, dados como p.

$$r_1 = \{p_1, p_2, p_3 \dots p_n\}$$

Agora tome que todo p é um valor, seu número de dígitos depende da posição que o subconjunto que o possui ocupa no conjunto maior, que no caso é R, ou seja existe a restrição de dígitos para cada p. Todo p de r_1 possui um dígito, todo p de r_2 possui dois dígitos, todo p de r_3 possui no máximo três dígitos e assim por diante (Figura 8).

Figura 8 – Quantidade de dígitos de p dada pela posição de r.

$$r_1 = \{0, 2, 5, \dots\}$$

$$r_2 = \{10, 12, 50, \dots\}$$

$$r_3 = \{200, 112, 320, \dots\}$$

$$\vdots$$

Fonte: Galeria do autor

Após desconsiderar os valores repetidos e analisar cuidadosamente o desenvolvimento desta ordem nota-se que todo valor natural existirá em algum subconjunto de R, fica perceptível na Figura 8.

DEMONSTRANDO O RESULTADO PARA OS NATURAIS

Será utilizado arranjos de repetição para provar que os subconjuntos com o número de dígitos restritos permitem a contagem do conjunto infinito *N.*

Tome K como o conjunto dos subconjuntos k;

$$K = \{k_1, k_2, k_3 \dots k_i \dots\}$$

v.3, n.1, 2022

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Cada subconjunto k terá elementos que serão valores inteiros positivos. A quantidade de elementos que cada k deve receber está determinada pelo arranjo com repetição iniciado em k_1. (Figura 9).

Figura 9 – Cardinalidade de subconjuntos com arranjos.

$$k_1 = 10^1 \rightarrow \ card(k_1) = 10 \rightarrow \ k_1 = \{0, 3, 2, 7, 8, 5, 1, 6, 4, 9\}$$

$$k_2 = 10^2 \rightarrow \ card(k_2) = 100 \rightarrow \ k_2 = \{00, 03, 20, 07, 80, 05, 01, 60, 44, 99 \ldots\}$$

$$k_3 = 10^3 \rightarrow \ card(k_3) = 1000 \rightarrow \ k_3 = \{000, 030, 200, 070, 800, 050, 001, 610, 144, 999 \ldots\}$$

$$\vdots$$

Fonte: Galeria do autor.

Pela lógica visualiza-se que todo *k* estará devidamente configurado em *K.* Seguidamente aplica-se o princípio da boa ordem em cada *k.* (Figura 10).

Figura 10 - Boa ordem para cada *k.*

$$k_1 = \{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

$$k_2 = \{00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09 \ldots 99 \}$$

$$k_3 = \{000, 001, 002, 003, 004, 005, 006, 007, 008, 009 \ldots 999\}$$

$$\vdots$$

Fonte: Galeria do Autor.

Entende-se que em cada subconjunto *k* está listado devidamente e em ordem com os valores respectivos de cada conjunto. Mantendo a boa ordem iniciamos a substituição de cada *k,* com sua respectiva posição em *K* por seus elementos.

Figura 11 - Substituindo elementos *k.*

$$K = \{\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}; \{00, 01, 02, 03, 04, 05, 06, 07, 08, 09 \ldots 99 \}\ldots\}$$

Fonte: Galeria do autor.

Agora remove-se as chaves que restringem os elementos dos subconjuntos e desconsidera-se os valores repetidos, isto é, aqueles com zero à esquerda. Será mantido apenas aqueles que surgem em subconjuntos anteriores (Figura 12).

Figura 12 - Obtendo o conjunto *N* em *K.*

$$K = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19\ldots\}$$

Fonte: Galeria do autor.

A posição em que os elementos *k* estão dispostos é crescente como no conjunto de *N* e isso foi mantido após a remoção dos elementos de mesmo valor devido, pois, cada elemento de cada *k* foi inserido em boa ordem.

Na sequência será feito tal método como teste para o conjunto dos Racionais e Binários, a fim de verificar se existe concordância com os resultados promovidos pela prova da Diagonalização.

APLICAÇÃO DO MÉTODO COM ELEMENTOS RACIONAIS

Tomando a definição de que todo elemento do conjunto dos Racionais é aquele que pode ser escrito em fração, considere que *T* é o conjunto que contém todas as possibilidades de racionais, portanto é aquele que possui todas as possibilidades de frações. Inicialmente admite-se subconjuntos *t* de *T*.

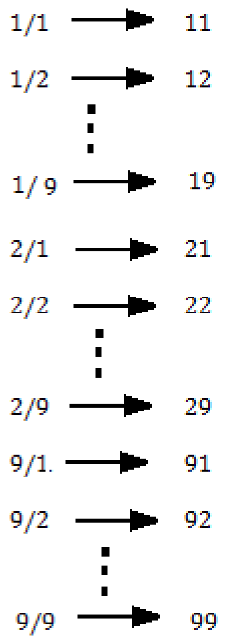
$$T = \{t_1, t_2, t_3 \ldots t_i \ldots\}$$

A posição de cada subconjunto *t* em *T* indica a quantidade de dígitos que serão usados para descrever e restringir numerador e denominador de cada possível fração. Assim:

$$t_1 = \left\{\frac{0}{1}, \frac{0}{2} \cdots \frac{0}{9}, \frac{1}{1}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{9} \cdots \frac{9}{9}\right\}$$

Cada fração do subconjunto t_1 possui a restrição de um dígito para o numerador e para o denominador. Todas as possibilidades podem ser obtidas a partir do arranjo de repetição e esse passo pode ser visualizado mais claramente quando são escritas as frações deitadas.

Figura 13 – Frações de t_1 deitadas para análise com arranjo de repetição.



Fonte: Galeria do autor.

Verifique que do lado direito da Figura 12 existe uma coleção de valores, cada um constituído com dois dígitos, o primeiro para o numerador e o segundo para o denominador. Em tal coleção é utilizado o arranjo de repetição para ser possível determinar todos os demais valores com dois dígitos. Como existe direta correspondência com t_1, pode ser verificado que todas as possíveis frações foram consideradas. Ainda sobre a coleção do lado direito da Figura 12 está aplicado o princípio da boa ordem, que organiza as frações de igual forma.

Ainda na Figura 12 é possível evitar alguns tipos de frações e valores correspondentes que foram evitados, isso foi adotado a fim de obter um resultado mais refinado, foram tomadas as seguintes considerações:

1ª Consideração: Não devem ser incluídas no subconjunto as frações cujo denominador é zero, pois não há resposta admissível para tais frações no conjunto dos racionais.

2ª Consideração: Assim como ocorreu na explicação com os *N*, verifique que subconjuntos maiores de *T* possuirão mais dígitos, logo desconsidere numeradores descritos com zero à esquerda, pois as frações seriam iguais a de subconjuntos menores. Exemplos de casos: 1/1 e 01/01 ou 55/10 e 055/010.

3ª Consideração: Não será adotado os numeradores de valor total zero, já que todo valor inteiro que divide zero resulta em zero e na contagem acabaríamos com grande quantidade de frações que podem ser resumidas a um valor, o zero.

Com tais considerações será construído t_2:

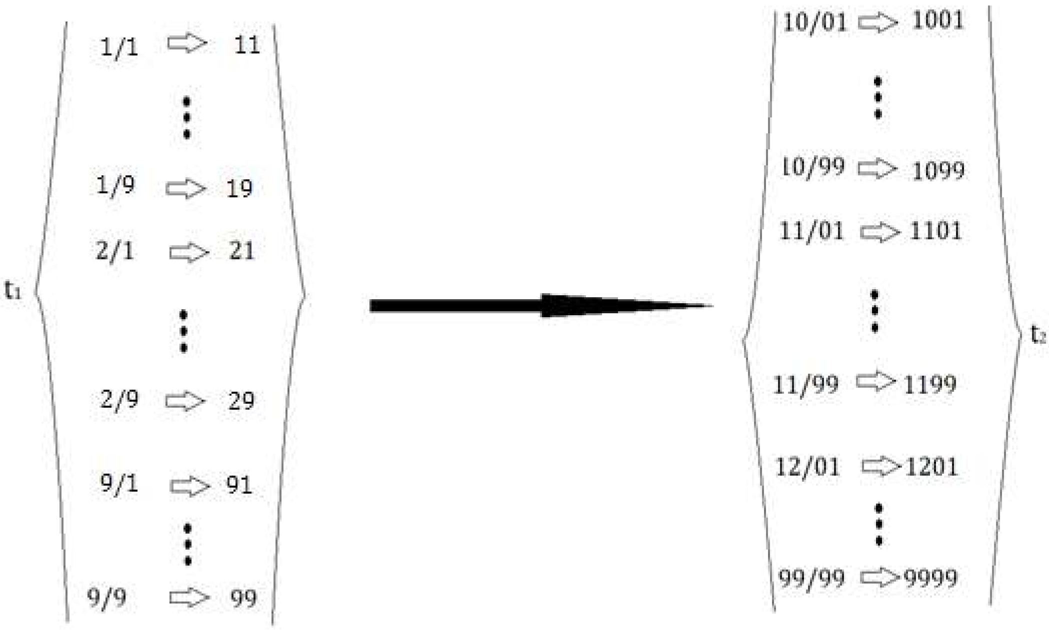
$$t_2 = \left\{\frac{10}{01}, \frac{10}{02} \cdots \frac{10}{99}, \frac{11}{01}, \frac{11}{02}, \frac{11}{03} \cdots \frac{11}{99} \cdots \frac{99}{99}\right\}$$

A posição de t_2 implica que haja a restrição de dois dígitos para o numerador e dois dígitos para o denominador. É importante notar que é aplicado o princípio da boa ordem nos valores de numerador e denominador e não propriamente nos resultados das divisões.

Note que é necessário somar 1 no último numerador de cada subconjunto *t*, a fim de se produzir o primeiro numerador do subconjunto seguinte e assim prosseguir com a construção dos demais *t* de *T*.

Na prática teríamos:

Figura 14 – O último numerador t_1 promove o primeiro numerador de t_2



Fonte: Galeria do autor.

Após se utilizar de tais passos, devemos por fim realizar a substituição, inserindo os elementos de cada *t* em *T*:

$$T = \left\{\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{9}, \frac{1}{1}, \frac{1}{2} \cdots \frac{1}{9} \cdots \frac{9}{9}\right\}; \left\{\frac{10}{01}, \frac{10}{02} \cdots \frac{10}{99}, \frac{11}{01}, \frac{11}{02}, \frac{11}{03} \cdots \frac{11}{99} \cdots \frac{99}{99}\right\} \cdots\right\}$$

Ao retirar as chaves podemos estabelecer a relação de um para um entre todas as possibilidades de frações e elementos do conjunto dos Naturais. A coleção de valores visíveis ao lado direito da Figura 14, em t_1 e t_2 pode ser utilizada para garantir a enumeração de todas as possíveis frações mediante as condições e uso do método aqui estudado.

Veja mais detalhes do resultado para o conjunto dos Racionais em planilha anexada, onde foi elaborada a construção das possibilidades de frações, de t_1 até t_3.

Observação: A regularidade que este método desenvolveu possibilita a determinação da equação que fornece a cardinalidade de elementos contidos em cada subconjunto *t*.

$$card(t_i) = (10^i - 1).9.10^{(i-1)}$$

Onde *i* é para qualquer subconjunto de *T.*

APLICAÇÃO DO MÉTODO COM ELEMENTOS BINÁRIOS

Após identificar o método de teste como aplicável em outros conjuntos, verifica-se a existência da possibilidade da aplicação do método para o conjunto dos elementos Binários.

Considere que *B* é o conjunto que possui todas as possibilidades de elementos binários desenvolvidos com os algarismos 1 e 0. As possibilidades por sua vez estão dadas no interior dos subconjuntos de b.

$$B = \{b_1, b_2, b_3 \dots b_i \dots\}$$

Será tomada a restrição de dígitos para cada valor binário, a restrição será devida a posição que o subconjunto ocupa no conjunto maior, neste caso é *B*.

Sob as restrições e com a boa ordem constitui-se os conjuntos (Figura 15):

Figura 15 – Definindo os elementos de cada *b.*

$$b_1 = \{0,1\}$$

$$b_2 = \{00, 01, 10, 11\}$$

$$b_3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

$$\vdots$$

Fonte: Galeria do autor.

Verifique que a determinação dos elementos dos subconjuntos é alcançada por meio de arranjos de repetição (Figura 16).

Figura 16 – Cardinalidades dos subconjuntos *b.*

$$b_1 = 2^1 \rightarrow card(b_1) = 2 \rightarrow b_1 = \{0, 1\}$$

$$b_2 = 2^2 \rightarrow card(b_2) = 4 \rightarrow b_2 = \{00, 01, 10, 11\}$$

$$b_3 = 2^3 \rightarrow card(b_3) = 8 \rightarrow b_3 = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$$

$$\vdots$$

Fonte: Galeria do autor.

Note que há todas as possibilidades de binários com um digito no subconjunto b_1, também há todas as possibilidades de binários com dois dígitos no conjunto b_2, em b_3 com três dígitos e assim por diante.

Retomando o conjunto *B* desenvolvemos as substituições dos subconjuntos por seus elementos e retiramos as chaves mantendo as posições dos valores (Figura 17).

Figura 17 – Substituição dos elementos de *B.*

$$B = \{b_1, b_2, b_3 \dots b_i \dots\} \rightarrow B = \{\{0,1\}; \{00,01,10,11\}; \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\} \dots\}$$

$$\boxed{B = \{0,1,00,01,10,11,000,001,010,011,100,101,110,111 \dots\}}$$

Fonte: Galeria do autor.

Após realizar esta última substituição é lógico interpretar que encontramos um possível método para enumerar elementos binários.

ENUMERANDO OS BINÁRIOS

Verifique que o conjunto *B* em destaque na Figura 13 é pode ser enumerado pelo conjunto *N* através da relação um para um (Figura 18).

Figura 18 – Enumerando *B* com *N*.

$$\begin{array}{l} B = \{\ 0,\ 1,\ 00,\ 01,\ 10,\ 11 \dots\} \\ \quad\ \ \downarrow\ \ \downarrow\ \ \ \downarrow\ \ \ \ \downarrow\ \ \ \ \downarrow\ \ \ \ \downarrow \\ N = \{\ 0,\ 1,\ \ 2,\ \ \ 3,\ \ \ 4,\ \ \ 5 \dots\} \end{array}$$

Fonte: Galeria do autor.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

O conjunto foi enumerado considerando não apenas o valor de cada elemento binário, mas também a quantidade de dígitos necessários para descrevê-lo, todavia ainda pode-se estabelecer a relação bijetora com *N* até quando é considerado somente os valores, aqueles que são implicados a cada elemento binário, independentemente da quantidade de dígitos utilizados para formar o elemento. Removendo os elementos de valores equivalentes de *B* (Figura 19).

Figura 19 – Removendo os valores equivalentes de *B.*

$$B=\{0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111...\}$$

$$\rightarrow \quad B=\{0,1,10,11,100,101,110,111...\}$$

Fonte: Galeria do autor.

Após a remoção realiza-se a enumeração (Figura 20).

Figura 20 – Enumerando os binários considerando apenas os valores atribuídos.

$$\begin{array}{cccccccc} B=\{ & 0, & 1, & 10, & 11, & 100, & 101 & ...\} \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ N=\{ & 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5 & ...\} \end{array}$$

Fonte: Galeria do autor.

Com este novo conjunto de elementos binários, parte superior da Figura 16, desenvolve-se uma segunda prova que é baseada nas definições de pares e ímpares.

Verifique que todo elemento binário é finalizado em 0 ou 1, se for finalizado em 0 é um valor par, se for finalizado em 1 é um valor ímpar, como nesse caso não há elemento que não seja um valor inteiro, temos que o conjunto *B* deve ser correspondente com as relações de par e ímpar funcionais para o conjunto *N.* Para par e ímpar assumisse verdadeira as definições (Figura 21):

Figura 21 – Relações de par e ímpar

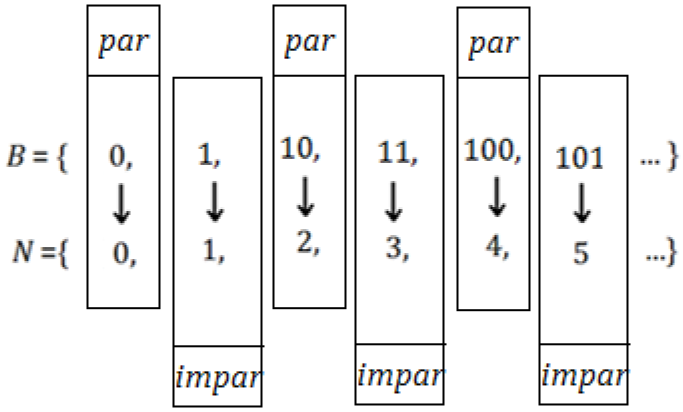
$$2n = par$$

$$2n + 1 = ímpar$$

Fonte: Galeria do autor.

Se todo par em *B* é finalizado em 0, todo seguinte deve ser ímpar e finalizado em 1 e isto é reconhecível (Figura 22).

Figura 22 – Alinhamento de pares e ímpares de *B* e *N*.



Fonte: Galeria do autor

O alinhamento mostrado na Figura 22 somente é possível devido a bijeção entre elementos pares e ímpares de *B* e *N*.

Exemplo 6: Tomado pela regra que $2n = par$, quando *n*=5 o resultante será 10, um valor binário e seu seguinte na sequência será 11, correspondendo a regra $2n + 1 = impar$.

Dado que todas as sequências binárias são mantidas pelo uso e combinação de dois caracteres o número de possibilidades é igual e por sua vez possibilitando a enumeração de maneira semelhante a demonstrada aqui.

3 CONSIDERAÇÕES FINAIS

1. Dois dos resultados obtidos pelo método da Diagonalização foi submetido a um teste que faz principalmente uso da análise combinatória e através desse teste não foi possível identificar o mesmo resultado obtido pela Diagonalização para uma sequência de Binários.

2. Foi demostrado que um novo método de contagem para elementos de conjuntos infinitos, composto principalmente de análise combinatória, subconjuntos e do princípio da boa ordem.

Neste artigo foi buscado submeter a teste o resultado obtido pelo método da Diagonalização de Cantor. O principal resultado notável deste trabalho foi a enumeração dos elementos binários, algo que provaria o oposto até então dado pelo método da Diagonalização. O estudo dirigido aqui foi feito de forma que seja possível a recriação dos passos, para que outras análises possam ser desenvolvidas e se for caso reafirmar os resultados ou melhorá-los. Interpreta-se que esta é a introdução de um possível novo método para contar elementos de conjuntos infinitos.

É constante o uso da análise combinatória na matemática apenas como um método de contagem para conjuntos finitos, todavia sua validade é provada não foi somente provada para *n* mas também para *n+1* e portanto deve ser válida para a contagem de elementos de conjuntos infinitos se utilizada com o uso da boa ordem e subconjuntos afim de gerar bijeção com os Naturais.

Este trabalho não nega o método da Diagonalização, apenas mostra que ele pode não ser abrangente o suficiente para estabelecer bijeção para todos os tipos conjuntos ou sequências. Se todos os processos aqui estiverem de acordo com o rigor exigido para tal, pode-se verificar que o método da Diagonalização não foi eficiente para enumeração dos binários, todavia ele é muito potente para enumeração de outros conjuntos, como por exemplo o dos Racionais.

REFERÊNCIAS

ARAUJO, J. S.; ALVES, G.; PINHEIRO, J. M. L.; FLORES, C. O. V. O infinito: Compreensões que perpassam teorias ensino e aprendizagem. **Revista Paranaense de Educação Matemática**, Campo Mourão, v. 9, n. 20, p. 279-305, nov./dez. 2020. Disponível em: http://rpem.unespar.edu.br/index.php/rpem/article/viewArticle/2319

ASSUNÇÃO, B. D. N.; BERTOLOTO, F. J. Propriedades do Conjunto de Cantor. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, RS, v. 7, n. 1, p. e3011, 2021. DOI: 10.35819/remat2021v7i1id4394. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/4394

HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**: combinatória e probabilidade. São Paulo: Atual Editora, 2013. p. 15-16.

IEZZI, G.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar**: conjuntos funções. São Paulo: Atual Editora, 1977. p. 39-A- 43-A.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**: sequências matrizes determinantes sistemas. São Paulo: Atual Editora, 1977. p. 1D-2D

SANTOS, J. P. O. **Introdução à teoria dos números**. Rio de Janeiro: SBM, 1998, p. 187. (Coleção Matemática Universitária).