RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

# OS NÚMEROS DOS QUATÉRNIOS E A ÁLGEBRA DE VETORES

## *THE QUATERNIONS NUMBERS AND VECTOR ALGEBRA*

## *LOS NÚMEROS CUATERNIONS Y ÁLGEBRA VECTORIAL*

Lia Nojosa Sena[1], Rubens Cainan Saboia Monteiro

e473514
https://doi.org/10.47820/recima21.v4i7.3514

PUBLICADO: 07/2023

**RESUMO**
O presente artigo destina-se à apresentação dos números quatérnios junto com as propriedades desta álgebra: associatividade, conjugação, divisão e identidade de quatro quadrados. Por fim, apresentaremos a conexão dos números quatérnios com a álgebra de vetores.

**PALAVRAS-CHAVE**: Álgebras reais. Números quatérnios. Álgebra de vetores.

***ABSTRACT***
*This article is intended to present the quaternions numbers together with the properties of this algebra: associativity, conjugation, division and identity of four squares. Finally, we will present the connection of quaternions numbers with vector algebra.*

***KEYWORDS:*** *Real algebras. Quaternions numbers. Vector algebra.*

***RESUMEN***
*Este artículo tiene como objetivo presentar los números cuaternions junto con las propiedades de esta álgebra: asociatividad, conjugación, división, identidad de cuatro cuadrados. Finalmente, presentaremos la conexión de los números cuaternions con el álgebra vectorial.*

***PALABRAS CLAVE****: Álgebra reales. Números cuaternions. Álgebra vectorial.*

## INTRODUÇÃO

O presente artigo destina-se à apresentação dos números quatérnios junto com as propriedades desta álgebra. Por fim, estudaremos a conexão desses números com a Álgebra de Vetores.

Era desejável criar um análogo aritmético do conceito de vetor e o sistema dos números complexos surge como o candidato perfeito de uma álgebra para representar e operar os vetores no plano.

Hamilton apresentou, em 1833, o primeiro tratamento realmente moderno dos números complexos como pares ordenados de reais. Ele ressaltou que um número complexo a + bi não é uma soma genuína; o uso do sinal de adição é um acidente histórico e *bi* não pode ser somado a *a*. O número a + bi nada mais é que o par (a, b).

Quando várias forças agem sobre um corpo elas não estão necessariamente num plano. Assim, naturalmente, era desejável encontrar uma álgebra para representar e operar vetores em espaços de maiores dimensões. Isso motivou a procura de um número complexo tridimensional e mais geralmente dos números hipercomplexos (álgebras).

[1] Mestra (e) em Matemática pela Universidade Federal do Ceará.

O problema que resultou foi na maneira apropriada de introduzir uma multiplicação no espaço de três dimensões $\mathbb{R}^3$ de modo que resulte numa generalização natural dos números complexos como pontos do plano (a, b) = a + bi, assim como estes são uma generalização natural dos números reais como pontos de identificação (a, 0) = a. Em outras palavras, considerando as triplas ordenadas de números reais (a, b, c) com as identificações (a, 0 ,0) = a e *(a, b, 0) = a + bi*, e com as operações usuais de adição e multiplicação por escalares, a questão é: podemos definir uma multiplicação de vetores em $\mathbb{R}^3$ de modo que sejam válidos todos os axiomas de um corpo? A resposta é não.

De fato, seja (a, b, c) = a + bi + cj (onde 1 = (1, 0, 0), i = (0, 1, 0) e j = (0, 0, 1)) e vamos supor que uma tal multiplicação está definida. Então podemos escrever:

$$ij = a_0 + b_0 i + c_0 j,$$

onde $a_0$, $b_0$ e $c_0$ são reais. Multiplicando ambos os lados por i à esquerda, obtemos:

$$-j = i^2 j = (ii)j = i(ij) = i(a_0 + b_0 i + c_0 j) = a_0 i - b_0 + c_0 ij.$$

Substituindo ij por $a_0 + b_0 i + c_0 j$, segue que:

$$-j = a_0 i - b_0 + c_0(a_0 + b_0 i + c_0 j)$$

$$= a_0 i - b_0 + c_0 a_0 + c_0 b_0 i + c_0^2 j$$

$$= (c_0 a_0 - b_0) + (a_0 + c_0 b_0)i + (1 + c_0^2)j = 0\,,$$

assim teríamos $1 + c_0^2 = 0$, com $c_0$ real, o que é uma contradição.

Note que, para chegar em uma contradição, usamos apenas a associatividade e distributividade da multiplicação.

## 1 REFERENCIAL TEÓRICO

Nas próximas subseções apresentaremos os números quatérnios e suas propriedades.

### 1.1 A Definição dos quatérnios

Após introduzir o tratamento moderno dos números complexos como pares ordenados de reais, Hamilton tentou uma generalização para triplas ordenadas. Em 1843, depois de dez anos de experimentações e sem ter provado a impossibilidade no espaço de três dimensões, ele descobriu os quatérnios, que são de dimensão quatro sobre os reais, e nos quais a multiplicação não é comutativa.

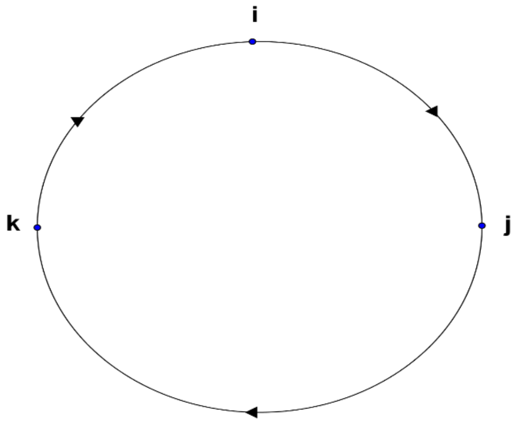
Os quatérnios $\mathbb{H}$ são números da forma $a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$, com $a_l \in R$, para $l \in \{1, 2, 3, 4\}$, a regra de adição é dada por:

$$(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) + (b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i + (a_3 + b_3)j + (a_4 + b_4)k.$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218



Para determinar a regra da multiplicação é suficiente atribuir valores aos produtos dos números i, j e k, dados por:




**Fonte:** Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

$$ij = k \quad ji = -k$$

$$jk = i \quad kj = -i$$

$$ki = j \quad ik = -j \quad (1.1.1.)$$

Assim, sejam:

$$q = a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k$$

e

$$q' = b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k,$$

onde $a_l, b_m \in \mathbb{R}$, com l, m ∈ {1, ... , 4}.

Temos:

$$qq' = (a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k)(b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k) = a_1 b_1 + a_1(b_2 i) + a_1(b_3 j) + a_1(b_4 k) + (a_2 i)(b_4 k) + (a_2 i)b_1 + (a_2 i)(b_2 i) + (a_2 i)(b_3 j) + (a_2 i)(b_4 k) + (a_3 j)b_1 + (a_3 j)(b_2 i) + (a_3 j)(b_3 j) + (a_3 j)(b_4 k) + (a_4 k)b_1 + (a_4 k)(b_2 i) + (a_4 k)(b_3 j) + (a_4 k)(b_4 k)$$

e

$$q'q = (b_1 + b_2 i + b_3 j + b_4 k)(a_1 + a_2 i + a_3 j + a_4 k) = b_1 a_1 + b_1(a_2 i) + b_1(a_3 j) + b_1(a_4 k) + (b_2 i)a_1 + (b_2 i)(a_2 i) + (b_2 i)(a_3 j) + (b_2 i)(a_4 k) + (b_3 j)a_1 + (b_3 j)(a_2 i) + (b_3 j)(a_3 j) + (b_3 j)(a_4 k) + (b_4 k)a_1 + (b_4 k)(a_2 i) + (b_4 k)(a_3 j) + (b_4 k)(a_4 k).$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218



A figura anterior nos ajuda a lembrar a tábua de multiplicação. Nela, os números i, j, k são representados por pontos no círculo. O produto de dois destes elementos é um terceiro elemento, negativo ou não, de acordo com a orientação circular por um primeiro elemento pelo segundo elemento de acordo com o sentido horário ou anti-horário do relógio. Percebe-se que a multiplicação não será comutativa, pois depende da ordem dos fatores. Os termos com dois ou três números i, j, k podem ser reduzidos usando as identidades anteriores, resultando:

$$qq' = a_1b_1 + a_1b_2i + a_1b_3j + a_1b_4k + a_2b_1i - a_2b_2 + a_2b_3k - a_2b_4j + a_3b_1j - a_3b_2k - a_3b_3 + a_3b_4i + a_4b_1k + a_4b_2j - a_4b_3i - a_4b_4$$

$$= (a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4) + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)i + (a_1b_3 - a_2b_4 + a_3b_1 + a_4b_2)j + (a_1b_4 + a_2b_3 - a_3b_2 + a_4b_1)k$$

e

$$q'q = b_1a_1 + b_1a_2i + b_1a_3j + b_1a_4k + b_2a_1i - b_2a_2 + b_2a_3k - b_2a_4j + b_3a_1j - b_3a_2k - b_3a_3 + b_3a_4i + b_4a_1k + b_4a_2j - b_4a_3i - b_4a_4$$

$$= (b_1a_1 - b_2a_2 - b_3a_3 - b_4a_4) + (b_1a_2 + b_2a_1 + b_3a_4 - b_4a_3)i + (b_1a_3 - b_2a_4 + b_3a_1 + b_4a_2)j + (b_1a_4 + b_2a_3 - b_3a_2 + b_4a_1)k. \quad (1.1.2.)$$

**1.2 A associatividade da multiplicação dos quatérnios**

A multiplicação dos quatérnios é associativa, isto é,

$$(q_1q_2)q_3 = q_1(q_2q_3). \quad (1.2.1.)$$

para quaisquer $q_1 = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$, $q_2 = b_1 + b_2i + b_3j + b_4k$ e $q_3 = c_1 + c_2i + c_3j + c_4k$ elementos dos quatérnios.

Segue que o lado esquerdo de (1.2.1.) é uma soma de 4×4×4 = 64 termos da forma

$$(u_1u_2)u_3 \quad (1.2.2.)$$

quando $u_1$ é igual a algum fator $a_l$ de $q_1$, $u_2$ algum fator $b_m$ de $q_2$ e $u_3$ algum fator $c_n$ de $q_3$, no qual l, m, n ∈ {1, 2, 3, 4}. Similarmente, o lado direito de (1.2.1.) é uma soma de 64 termos da forma

$$u_1(u_2u_3). \quad (1.2.3.)$$

Se mostrarmos que cada um dos termos de (1.2.2.) é igual a algum dos termos de (1.2.3.), então (1.2.1.) é verdadeira.

Assim, para verificarmos (1.2.1.) é necessário checar cada caso em que $q_1, q_2, e\ q_3$ são quaisquer dos quatro quatérnios $a, b_i, c_j, d_k$. Como podemos retirar os coeficientes numéricos, então precisamos apenas verificar (1.2.1.) para os quatro quatérnios $1, i, j, k$. Por exemplo, para mostrar que $((a_2 i)(b_3 j))(c_3 i) = (a_2 i)((b_3 j)(c_3 i))$ é suficiente mostrar que $(ij)k = i(jk)$.

Se um dos quatérnios $q_1$, $q_2$ ou $q_3$ é 1, então (1.2.1.) é obviamente verdadeira. Assim, é suficiente verificar em (1.2.1.) quando $q_1$, $q_2$, $q_3$ possuem qualquer um dos quatérnios i, j, k. Serão 27 destas igualdades. Algumas delas são:

$$(ii)i = i(ii),$$

$$(ii)j = i(ij),$$

$$(ij)i = i(ji),$$

$$(ij)k = i(jk).$$

Usando (1.1.1.) é fácil verificar as 27 igualdades. Isto prova a associatividade da multiplicação dos quatérnios.

**1.3 Conjugação dos quatérnios**

A conjugação de um quatérnio

$$q = a + bi + cj + dk$$

é dada por:

$$\overline{q} = a - bi - cj - dk.$$

Claramente, a soma de um quatérnio $q$ por seu conjugado $\overline{q}$ é um número real. A definição da multiplicação dos quatérnios implica que $q\overline{q}$ é real. De fato,

$$q\overline{q} = (a + bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \quad (1.3.1)$$

e

$$\overline{q}q = (a - bi - cj - dk)(a + bi + cj + dk)$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + d^2. \quad (1.3.2.)$$

Analogamente aos números complexos, o número não negativo

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

é dito valor absoluto de um quatérnio $q$ e denotado por $|q|$. Então (1.3.1.) e (1.3.2.) podem ser escritas como:

$$q\overline{q} = \overline{q}q = |q|^2.$$

Esta fórmula é a mesma para os números complexos.

Se $q'$ é um quatérnio "imaginário puro", isto é, se $q' = bi + cj + dk$, então:

$$q'^{\,2} = -(b^2 + c^2 + d^2) \leq 0.$$

Por outro lado, se o quadrado de um quatérnio for real e menor que ou igual a zero, então esse quatérnio é imaginário puro.

De fato, se $q = a + bi + cj + dk$, então:

$$\begin{aligned} q^2 &= (a + q')(a + q') \\ &= a^2 + q'^2 + 2aq' \\ &= a^2 - b^2 - c^2 - d^2 + 2aq'. \end{aligned}$$

Se a última expressão fosse um número real e $a \neq 0$, então $q' = 0$. Mas então $q = a$ e $q^2 = a$ não podem ser menores que 0. Segue que os quatérnios da forma $bi + cj + dk$, e somente tais quatérnios, podem ser caracterizados pela condição desses quadrados serem números reais negativos. Assim, podemos ter uma descrição alternativa da operação de conjugação: seja $q$ um quatérnio e $q + a + q'$ a única representação tal que o quadrado $q'$ é real e negativo. Então $\overline{q} = a - q'$.

Por verificação direta, mostra-se que o conjugado possui as seguintes propriedades:

$$\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$$

(o conjugado da soma é a soma dos fatores conjugado), e

$$\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1} \quad (1.3.3.)$$

(o conjugado do produto é o produto dos fatores conjugado em ordem inversa). Temos igualdades análogas para os números complexos. A única diferença é que, para os números complexos, podemos escrever $\overline{z_1}\,\overline{z_2}$ no lugar de $\overline{z_2}\,\overline{z_1}$ (pois a multiplicação de números complexos é comutativa) enquanto os produtos de quatérnios $\overline{q_2}\,\overline{q_1}$ e $\overline{q_1}\,\overline{q_2}$ são, em geral, diferentes.

Para verificar (1.3.3.) é suficiente checar os casos em que $q_1\ q_2$ são quaisquer dois entre os três quatérnios $i$, $j$ e $k$, pela mesma razão que isso foi suficiente para comprovar a validade da associatividade. Essa verificação é facilmente realizada usando a tabela (1.1.1.). Por exemplo:

$$\overline{ii} = \overline{-1} = -1, \text{ e } \overline{i}\,\overline{i} = (-i)(-i) = i^2 = -1$$

$$\overline{ij} = \overline{k} = -k, \text{ e } \overline{j}\,\overline{i} = (-j)(-i) = ji = -k.$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218



### 1.4 Divisão nos quatérnios

Existe uma diferença entre a divisão dos quatérnios para a divisão nos números complexos. Enquanto para os complexos o quociente de $z_1$ por $z_2$ é a solução da equação $z_2 x = z_1$, os quatérnios não são comutativos, sendo então necessário considerarmos as duas seguintes equações:

$$q_2 x = q_1 \quad (1.4.1.)$$

$$x q_2 = q_1. \quad (1.4.2.)$$

Dizemos que a solução da primeira dessas equações é quociente à esquerda de $q_1$ por $q_2$ e denotamos por $x_E$. Similarmente, a solução da segunda equação é quociente à direita de $q_1$ por $q_2$ e denotamos por $x_D$. Assim, para solucionarmos a equação (1.4.1.) multiplicamos ambos os lados à esquerda por $\overline{q_2}$ e então por $\frac{1}{|q_2|^2}$:

$$\begin{aligned} q_2 x = q_1 &\Rightarrow \overline{q_2}(q_2 x) = \overline{q_2} q_1 \\ &\Rightarrow (\overline{q_2} q_2) x = \overline{q_2} q_1 \\ &\Rightarrow |q_2|^2 x = \overline{q_2} q_1 \\ &\Rightarrow \frac{1}{|q_2|^2} |q_2|^2 x = \frac{1}{|q_2|^2} \overline{q_2} q_1 \\ &\Rightarrow \quad x = \frac{1}{|q_2|^2} \overline{q_2} q_1. \end{aligned}$$

Substituindo em (1.4.1.) verificamos que essa expressão é solução. De fato, temos:

$$\begin{aligned} q_2 x &= q_2 \left( \frac{1}{|q_2|^2} \overline{q_2} q_1 \right) \\ &= \frac{1}{|q_2|^2} q_2 \, \overline{q_2} \, q_1 \\ &= \frac{1}{|q_2|^2} |q_2|^2 q_1 \\ &= q_1. \end{aligned}$$

Logo,

$$x_E = \frac{1}{|q_2|^2} \overline{q_2} q_1.$$

Agora, para solucionarmos (1.4.2.), multiplicamos ambos os lados à direita por $\overline{q_2}$ e então por: $\frac{1}{|q_2|^2}$:

$$x q_2 = q_1 \Rightarrow (x q_2)\overline{q_2} = q_1 \, \overline{q_2}$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218



$$\Rightarrow x(q_2\,\overline{q_2}) = q_1\,\overline{q_2}$$

$$\Rightarrow x|q_2|^2 = q_1\,\overline{q_2}$$

$$\Rightarrow x\,|q_2|^2\frac{1}{|q_2|^2} = q_1\,\overline{q_2}\,\frac{1}{|q_2|^2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{|q_2|^2}q_1\,\overline{q_2}.$$

Substituindo em (1.4.2.) verificamos que essa expressão é solução. De fato, temos:

$$xq_2 = \left(\frac{1}{|q_2|^2}q_1\,\overline{q_2}\right)q_2$$

$$= \frac{1}{|q_2|^2}q_1\,\overline{q_2}q_2$$

$$= \frac{1}{|q_2|^2}q_1|q_2|^2$$

$$= q_1\,.$$

Assim,

$$x_D = \frac{1}{|q_2|^2}q_1\,\overline{q_2},$$

como solução de (1.2.8). Temos que as soluções $x_E$ e $x_D$ são únicas. Mas não são necessariamente iguais. Por exemplo, calculemos o quociente à esquerda e à direita de $k$ por $1 + i + j + k$, dados por:

$$x_E = \frac{1}{4}(1 - i - j - k)k = \frac{1}{4}(k + j - i + 1)$$

e

$$x_E = \frac{1}{4}k(1 - i - j - k) = \frac{1}{4}(k - j + i + 1).$$

Portanto, nesse caso, $x_E \neq x_D$.

**1.5 A identidade de quatro quadrados. formulação geral do problema da soma de quadrados**

Uma propriedade importante dos quatérnios é que o vetor absoluto de um produto de fatores é o produto dos vetores absolutos desses fatores.

Sejam $q_1, q_2 \in \mathbb{H}$, então:

$$|q_1q_2| = |q_1||q_2|$$

ou, equivalentemente,

$$|q_1q_2|^2 = |q_1|^2|q_2|^2. \quad (1.5.1)$$

Vamos provar (1.5.1.)

$$|q_1q_2|^2 = (q_1q_2)(\overline{q_1q_2})$$

$$= q_1q_2\,\overline{q_2}\,\overline{q_1}$$

$$= q_1|q_2|^2\overline{q_1}$$

$$= q_1\,\overline{q_1}\,|q_2|^2$$

$$= |q_1|^2|q_2|^2.$$

A igualdade:

$$|q_1q_2|^2 = |q_1|^2|q_2|^2,$$

explicada em detalhes, leva a uma interessante identidade. Assim, sejam:

$$q_1 = a_1 + a_2i + a_3j + a_4k$$

e

$$q_2 = b_1 + b_2i + b_3j + b_4k.$$

Então $q_1q_2$ é a expressão do lado direito em (1.1.2.). Se olharmos o lado esquerdo (1.5.1.), então podemos escrevê-los como:

$$(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + a_4^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + b_4^2) = \quad (1.5.2.)$$
$$(a_1b_1 - a_2b_2 - a_3b_3 - a_4b_4)^2 + (a_1b_2 + a_2b_1 + a_3b_4 - a_4b_3)^2 + (a_1b_3 + a_3b_1 + a_4b_2 - a_2b_4)^2 + (a_1b_4 + a_4b_1 + a_2b_3 - a_3b_2)^2.$$

Para os números complexos, a igualdade $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$ produz a igualdade

$$(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) = (a_1b_1 - a_2b_2)^2(a_1b_2 + a_2b_1)^2 ,$$

no qual dizemos que o produto da soma de dois quadrados é igual à soma de dois quadrados.

Similarmente, (1.5.2.) pode ser escrito como o produto da soma de quatro quadrados pela soma de quatro quadrados.

As identidades anteriores nos sugerem o seguinte problema: para quais valores de $n$ existem identidades que satisfaçam a propriedade “o produto da soma de $n$ quadrados pela soma de $n$ quadrados é a soma de $n$ quadrados?”

Para $n = 1$, temos $a^2b^2 = (ab)^2$.

Vimos a validade para $n = 2$ e $n = 4$. Mas e para *n = 3, 5, 6, ... ?* Em 1898, o matemático A. Hurwitz demonstrou que o produto só tem solução para $n = 1, 2, 4$ e $8$.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218



Sejam $a_1, a_2, \cdots, a_n$ e $b_1, b_2, \cdots, b_n$ sequências de letras. Por uma forma bilinear nestas letras, queremos dizer uma soma de uma letra $a_i$ por uma letra $b_j$, onde $i, j = \{1, \ldots, n\}$. Por exemplo, a expressão:

$$a_1b_1 + 8a_1b_2 - 2a_3b_5 + 3a_3b_n$$

é uma forma bilinear. O "problema da soma de quadrados" pode ser escrito de forma mais precisa: para quais valores de $n$ podemos encontrar $n$ formas bilineares $\Phi_1, \Phi_2, \cdots, \Phi_n$ tais que:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2) = \Phi_1^2 + \Phi_2^2 + \cdots + \Phi_n^2$$

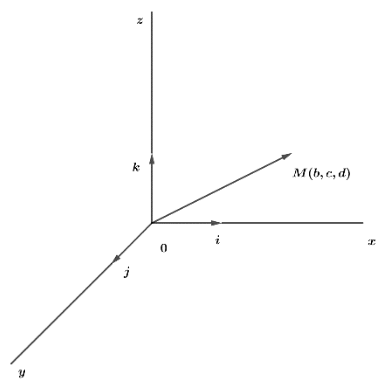
## 2 RESULTADOS

Nas próximas subseções apresentaremos a álgebra de vetores utilizando os números quatérnios.

### 2.1 Quatérnios e álgebra dos vetores

Os quatérnios deram origem à Álgebra de Vetores, uma das áreas mais frutíferas da matemática. Nesta seção, descreveremos a conexão entre o cálculo dos quatérnios e as operações dos vetores no espaço 3-dimensional.

### 2.2 A parte real e a parte imaginária de um quatérnio




**Fonte:** Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)

Vamos considerar um sistema de coordenadas no espaço com vetores unitários $i, j, k$ no eixo das coordenadas. Então qualquer soma da forma $bi + cj + dk$, onde $b$, $c$ e $d$ são números reais, representa um vetor junto com a origem 0 do sistema de coordenadas para o ponto $M$ com as coordenadas $b, c, d$.

Agora consideremos os quatérnios. Podemos considerar cada quatérnio:

$$q = a + bi + cj + dk$$

como uma soma formal de um número real $a$ com o vetor $bi + cj + dk$ . Chamamos $a$ de parte real (ou número) de $q$ e $bi + cj + dk$ da parte imaginária (ou vetor).

Vamos considerar os vetores:

$$q_1 = b_1 i + c_1 j + d_1 k$$

e

$$q_2 = b_2 i + c_2 j + d_2 k.$$

e o produto deles:

$$q_1 q_2 = -(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2) + (c_1 d_2 - d_1 c_2) i + (d_1 b_2 - b_1 d_2) j + (b_1 c_2 - c_1 b_2) k. \quad (2.2.1.)$$

Temos que a parte real de $q_1 q_2$ é:

$$-(b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2), \quad (2.2.2.)$$

enquanto sua parte imaginária é:

$$q_1 q_2 = (c_1 d_2 - d_1 c_2) i + (d_1 b_2 - b_1 d_2) j + (b_1 c_2 - c_1 b_2) k. \quad (2.2.3.)$$

**2.3 Produtos escalares de vetores**

Cada expressão (2.2.2.) e (2.2.3.) tem um sentido geométrico definido. Mostraremos que a soma $b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2$ é igual a $|q_1||q_2|\cos\varphi$ , isto é, o produto dos valores absolutos dos vetores $q_1$ e $q_2$ pelo cosseno do ângulo formado entre eles. Referimos tal produto como “produto escalar dos vetores $q_1$ e $q_2$“. Temos que o produto escalar é um número e não um vetor e o denotamos por $(q_1, q_2)$. Assim, por definição,

$$(q_1, q_2) = |q_1||q_2|\cos\varphi .$$

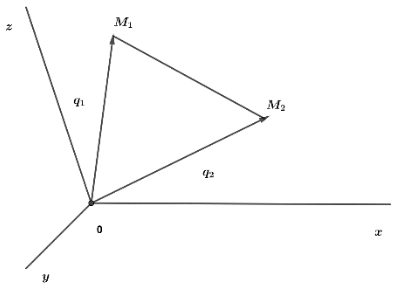
Provaremos que:

$$(q_1, q_2) = b_1 b_2 + c_1 c_2 + d_1 d_2. \quad (2.3.1)$$

Considere o triângulo determinado pelos vértices $q_1$ e $q_2$. Um de seus vértices está na origem. Os vértices restantes são os pontos $M_1, M_2$ (pontos finais dos vetores $q_1, q_2$) com coordenadas $b_1, c_1, d_1$ e $b_2, c_2, d_2$, respectivamente

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218






**Fonte:** Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)

Temos que:

$$0M_1^2 = b_1^2 + c_1^2 + d_1^2$$

$$0M_2^2 = b_2^2 + c_2^2 + d_2^2$$

$$M_1M_2^2 = (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 + (d_1 - d_2)^2.$$

Então:

$$M_1M_2^2 = b_1^2 - 2b_1b_2 + b_2^2 + c_1^2 - 2c_1c_2 + c_2^2 + d_1^2 - 2d_1d_2 + d_2^2 \quad (2.3.2.)$$

$$= (b_1^2 + c_1^2 + d_1^2) + (b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) - 2(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2)$$

$$= 0M_2^2 + 0M_2^2 - 2(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2).$$

Pela lei dos cossenos, temos:

$$M_1M_2^2 = 0M_2^2 + 0M_2^2 - 20M_{1.}0M_2.cos\varphi, \quad (2.3.3.)$$

onde $\varphi$ é o ângulo em 0 (o ângulo entre os vetores $q_1$ e $q_2$). Igualando (2.3.2.) e (2.3.3.) obtemos:

$$0M_1^2 + 0M_2^2 - 2(b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2) = 0M_1^2 + 0M_2^2 - 20M_{1.}0M_2.cos\varphi$$

$$\Rightarrow 0M_{1.}0M_2^2.cos\varphi = b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2.$$

Assim, a parte real do produto dos vetores $q_1$, $q_2$ é o produto escalar negativo.

Observemos que se o produto de vetores não nulos $q_1$ e $q_2$ são perpendiculares, então seu produto escalar é zero $\left(\varphi = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi = 0\right)$. Mas então a parte real deste produto escalar é zero e $q_1q_2$ é um vetor "puro". Temos também que a afirmação inversa é verdadeira: se $q_1q_2$ é um vetor puro, então o produto escalar de $q_1$ e $q_2$ é zero. Se assumirmos que $q_1$, $q_2 \neq 0$, isto é, que $\varphi$ está bem definido, segue que $cos\varphi = 0$ e $q_1$, $q_2$ são perpendiculares. Além disso, $q_1q_2 = -q_2q_1$. Isto segue da fórmula (2.2.1.) se tivermos em mente que a parte real de $q_1q_2$ é zero.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218



**2.4 Produto vetorial de vetores**

A interpretação geométrica da parte imaginária do produto $q_1q_2$ , isto é, do lado direito de (2.2.3.), é mais complicada. Chamamos de produto vetorial dos quatérnios $q_1$ e $q_2$ e denotamos por $[q_1, q_2]$. Assim,

$$[q_1, q_2] = (c_1d_2 - d_1c_2)i + (d_1b_2 - b_1d_2)j + (b_1c_2 - c_1b_2)k.$$

Temos que o vetor $[q_1, q_2]$ é perpendicular a cada um dos vetores $q_1$ e $q_2$ e seu valor absoluto é igual $|q_1||q_2|\text{sen}\varphi$ , isto é, a área S do paralelogramo nos vetores $q_1$ e $q_2$.

Para provar a perpendicularidade dos vetores $[q_1, q_2]$ e $q_1$ é suficiente mostrar que a parte real do produto é zero ou, equivalentemente, que este produto seja um vetor puro. Como (2.2.3.) e (2.3.1.) implicam que:

$$[q_1, q_2] = q_1q_2 + (q_1, q_2), \quad (2.4.1.)$$

então:

$$\begin{aligned} q_1[q_1, q_2] &= q_1(q_1q_2 + (q_1, q_2)) \\ &= q_1^2q_2 + (q_1, q_2)q_1 \\ &= -|q_1|^2q_2 + (q_1, q_2)q_1. \quad (2.4.2.) \end{aligned}$$

Note que trocamos $q_1^2$ por $-|q_1|^2$. De fato, pela fórmula (2.4.1.), temos que:

$$\begin{aligned} -q_1^2 &= -(b_1^2 + c_1^2 + d_1^2) + 0i + 0j + 0k \\ &= -|q_1|^2. \end{aligned}$$

A soma do lado direito de (2.2.1.) é a soma de dois vetores, e portanto, é um vetor.

Agora, vamos provar que os vetores $[q_1, q_2]$ e $q_2$ são perpendiculares. De fato, como já vimos que vale (2.4.1.), temos:

$$\begin{aligned} q_2[q_1, q_2] &= q_2\big(q_1q_2 + (q_1, q_2)\big) \\ &= -|q_2|^2q_2 + (q_1, q_2)q_2. \quad (2.4.3.) \end{aligned}$$

Da mesma forma que vimos anteriormente, temos:

$$\begin{aligned} q_2^2 &= -(b_2^2 + c_2^2 + d_2^2) + 0i + 0j + 0k \\ &= -|q_2|^2. \end{aligned}$$

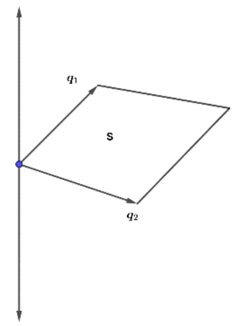
Portanto, a expressão à direita em (2.4.3.) é a soma de dois vetores, logo também é um vetor.

Nos resta calcular o valor absoluto do vetor $[q_1, q_2]$. Seu quadrado é igual a:

$$(c_1d_2 - d_1c_2)^2 + (d_1b_2 - b_1d_2)^2 + (b_1c_2 - c_1b_2)^2.$$

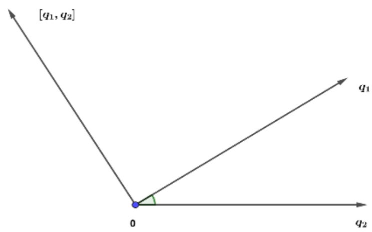
A última expressão é $|q_1|^2|q_2|^2 - (q_1, q_2)$, ou usando a definição de produto escalar, obtemos $|q_1|^2|q_2|^2 - |q_1|^2|q_2|^2 \cos^2 \varphi$, isto é, $|q_1|^2|q_2|^2 sen^2\varphi$.

Assim, mostramos que o quadrado do valor absoluto do vetor $[q_1, q_2]$ é igual a $|q_1|^2|q_2|^2 sen^2\varphi$, isto é, $S^2$.

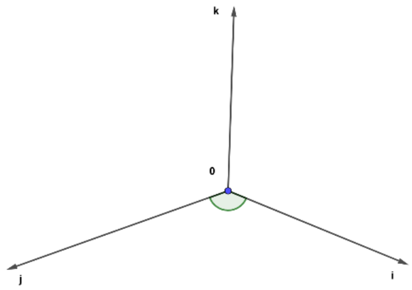



**Fonte:** Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)

As propriedades do vetor $[q_1, q_2]$ recém-estabelecidas (o fato de ser perpendicular a $q_1$ e $q_2$ e que seu valor absoluto é $S$) não o determinam de forma única. Em verdade, só existem dois desses vetores e eles são diretamente opostos (figura acima). A descrição do vetor $[q_1, q_2]$ está completa com a afirmação de que a orientação da tripla $q_1$, $q_2$, $[q_1, q_2]$ no espaço é a mesma da tripla $i$, $j$, $k$. Isso significa que:




**Fonte:** Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)




**Fonte:** Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)

Se olharmos para o plano dos vetores $q_1$ e $q_2$ onde o $[q_1, q_2]$ tem sua extremidade na origem então temos que a rotação de $q_1$ e em torno de $[q_1, q_2]$ é a mesma orientação da menor rotação de $i$ para $j$ em torno de $k$ onde tem sua extremidade na origem. (Figura)

Para a multiplicação dos vetores puros temos a fórmula:

$$q_1 q_2 = -(q_1, q_2) + [q_1, q_2],$$

onde $(q_1, q_2)$ é o produto escalar dos vetores $q_1$, $q_2$ e $[q_1, q_2]$ é seu produto vetorial.

As operações de produto escalares e vetoriais (junto com adição de vetores e multiplicação de vetores por escalares) são a base da Álgebra Vetorial (Álgebra Linear) - um ramo da Matemática com inúmeras aplicações em Matemática e em Física (especialmente na Mecânica). Uma apresentação clara da Álgebra Vetorial apareceu muito depois dos primeiros artigos sobre a Teoria dos Quatérnios, em 1850, enquanto seus fundamentos foram formados pelo matemático e físico Gibbs em 1880.

**2.5 A interpretação geométrica da multiplicação de um quatérnio por um quatérnio puro**

Devido ao fato que a multiplicação dos quatérnios envolve os produtos escalar e vetorial, os quatérnios são uma ferramenta muito útil para problemas na mecânica e geometria.

Seja:

$$q = a + bi + cj + dk$$

um quatérnio cujo valor absoluto é 1. Então:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1.$$

Ponha

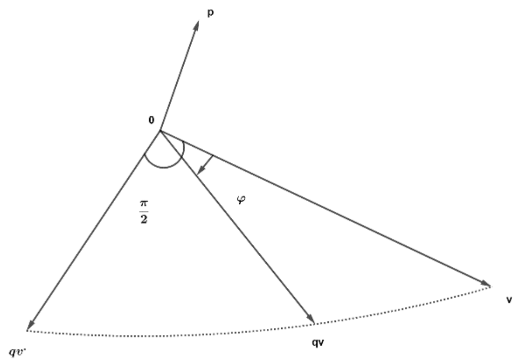
$$q = a + q',$$

onde $q'$ é um vetor $bi + cj + dk$. Como $|a|^2 + |q'|^2 = 1$, então existe um único ângulo $\varphi$ , $0° \leq \varphi \leq 180°$ tal que:

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218



$$a = \cos\varphi \ , \qquad |q'| = sen\,\varphi$$




**Fonte:** Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)

Portanto, $q' = |q'|p$, onde $p$ é um vetor de comprimento unitário. Logo,

$$q = cos\,\varphi \ + sen\,\varphi.$$

Todo quatérnio $q$ de vetor absoluto $1$ pode ser representado da forma como vimos anteriormente (com um vetor $p$ de comprimento unitário) e esta representação é única.

Multiplicamos o quatérnio $q$ por um vetor $v$ arbitrário que é perpendicular a $p$. Logo,

$$qv = (cos\varphi \ + p\,sen\,\varphi)v$$

$$= v\,\cos\varphi \ + p\,sen\,\varphi.$$

Como $q$ e $v$ são perpendiculares, então a parte real de $pv$ é zero e a outra parte do vetor é $[p, v]$, isto é, um vetor de comprimento $|p|.|v|.sen\,\frac{\pi}{2} = |v|$, perpendicular a $p$ e $v$ e orientado com respeito a $p$ e $v$ da mesma forma que o vetor $k$ em relação a $i$ e $j$. Denotamos este vetor por $\dot{v}$. Então podemos dizer que $\dot{v}$ é o resultado da rotação de $v$ por $\frac{\pi}{2}$ em torno de $p$. Para evitar qualquer ambiguidade, estipulamos que a orientação em torno $p$ seja a mesma que a menor orientação de $i$ para $j$ em torno de $k$ . Logo,

$$qv = v\,cos\varphi \ + \ \dot{v}\,sen\,\varphi\,.$$

Pela figura anterior vemos que o vetor $qv$ é obtido de $v$ por uma rotação por $p$ em torno de $\varphi$.

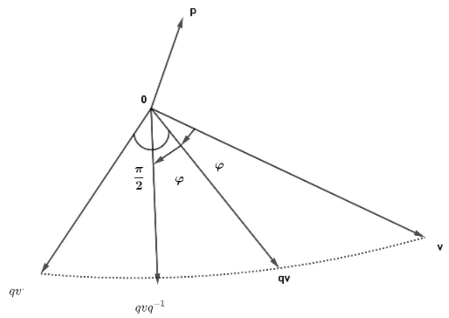
Portanto, se $p$ é um vetor de comprimento $1$ e $v$ é um vetor qualquer perpendicular a $p$, então, multiplicando $v$ à esquerda pelo quatérnio

$$q = \cos\varphi + p\,sen\,\varphi,$$

rotacionamos $p$ em torno do ângulo $\varphi$.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218






**Fonte:** Dados da pesquisa / Próprios autores (2023)

**2.6 Representação de uma rotação arbitrária no espaço por um quatérnio**

Considerando uma ação mais complexa em $v$, podemos obter uma representação de um quatérnio por uma rotação em torno de $p$ por um vetor arbitrário $v$. Considere a expressão:

$$qvq^{-1}$$

no lugar de $qv$, onde $q^{-1}$ é o inverso do quatérnio $q$, isto é, $qq^{-1} = 1$. Temos que $q^{-1} = 1\cos\varphi - p\, sen\,\varphi$. De fato,

$$\begin{aligned} qq^{-1} &= (\cos\varphi - p\, sen\,\varphi)(\cos\varphi \ - p\, sen\,\varphi) \\ &= \cos^2\varphi - p\cos\varphi\, sen\,\varphi + p\, sen\,\varphi\ \cos\varphi + p^2\, sen^2\,\varphi \\ &= 1\,. \end{aligned}$$

Vamos demonstrar que o vetor $qvq^{-1}$ é o resultado de uma rotação do $v$ pelo vetor $p$ em torno de $2\varphi$.

Assumamos que o vetor $v$ é perpendicular a $p$. Então,

$$\begin{aligned} qvq^{-1} &= qv\,(\cos\varphi - p\, sen\,\varphi) \\ &= qv\ \cos\varphi - \ (qv)\, p\, sen\,\varphi. \end{aligned}$$

Temos que $qv$ é perpendicular a $p$. Logo $(qv)p = -p(qv)$. Anteriormente vimos que o quatérnio $p(qv)$ é um vetor obtido pela rotação de $qv$ sobre $p$ em torno de $\frac{\pi}{2}$ Depois denotamos por $q\dot{v}$. Assim,

$$qvq^{-1} = qv\cos\varphi + q\dot{v}\, sen\,\varphi.$$

A expressão à direita é um vetor obtido pela rotação de $qv$ sobre $p$ em torno do ângulo $\varphi$. Se tivermos em mente que $qv$ é obtido de $v$ com a mesma rotação, então $qvq^{-1}$ é o resultado da rotação $v$ sobre $p$ em torno do ângulo $2\varphi$.

Portanto, consideremos o caso geral observando que, se o vetor $v$ é um múltiplo de $p$, ou seja, $v = \lambda p$, então $qv = vq$ e

$$qvq^{-1} = vqq^{-1} = v.$$

Seja $v$ um vetor arbitrário. Decomponhamo-lo em duas componentes $v = v_1 + v_2$, onde $v_1$ é um vetor perpendicular a $p$ e $v_2$ é proporcional a $p$. Então,

$$\begin{aligned} qvq^{-1} &= q(v_1 + v_2)q^{-1} \\ &= qv_1q^{-1} + qv_2q^{-1} \\ &= qv_1q^{-1} + v_2qq^{-1} \\ &= qv_1q^{-1} + v_2. \end{aligned}$$

Temos que o componente $v_1$ é rotacionado por $p$ em torno do ângulo $2\varphi$ e a componente $v_2$ não é mudada. Portanto, $v$ é rotacionado por $p$ em torno do ângulo $2\varphi$.

Mostramos que a rotação de $p$ em torno do ângulo $2\varphi$ leva um vetor $v$ no vetor $qvq^{-1}$, onde

$$q = \cos\varphi + p\, sen\, \varphi.$$

Dizemos que a rotação indicada corresponde ao quatérnio $q$.

### 2.7 O problema da composição de rotações

Considere uma rotação em torno do ângulo $2\varphi_1$ sobre o eixo determinado pelo vetor unitário $p_1$. Esta rotação é seguida por uma rotação em torno do ângulo $2\varphi_2$ sobre o eixo determinado pelo vetor unitário $p_2$. Queremos encontrar o eixo e o ângulo resultante desta rotação.

Vimos que a primeira rotação leva um vetor qualquer $v$ para o vetor $v_1 = q_1vq_1^{-1}$, onde $q_1 = \cos\varphi_1 + p_1 sen\, \varphi_1$. A segunda rotação leva $v_1$ em:

$$\begin{aligned} v_2 &= q_2v_1q_2^{-1} \\ &= q_2(q_1vq_1^{-1})q_2^{-1} \\ &= (q_2q_1)v(q_2q_1)^{-1}. \end{aligned}$$

Usamos acima a igualdade $q_1^{-1}q_2^{-1} = (q_2q_1)^{-1}$. De fato, temos $(q_2q_1)(q_1^{-1}q_2^{-1}) = 1$ o que implica a igualdade que usamos. Assim, a aplicação sucessiva dessas duas rotações leva o vetor $v$ no vetor

$$v_2 = (q_2q_1)v(q_2q_1)^{-1}.$$

Em outras palavras, o resultado da aplicação sucessiva de duas rotações correspondente aos quatérnios $q_1$ e $q_2$ é a rotação que corresponde ao quatérnio $q_2q_1$.

Com a regra de multiplicação dos quatérnios é fácil computar $q_2q_1$. Então colocamos na forma

$$q_2q_1 = \cos\psi + p\, sen\, \psi, \quad (2.7.1.)$$

com $p$ vetor unitário. O resultado dessa rotação é uma rotação sobre $p$ em torno do ângulo $2\psi$.

Por exemplo: suponha que a primeira rotação sobre o eixo $x$ em torno do ângulo $\frac{\pi}{2}$ e a segunda rotação sobre o eixo $y$ com mesmo ângulo. O quatérnio correspondente a primeira rotação é $q_1 = \cos\frac{\pi}{2} + i\,sen\,\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$, e o quatérnio correspondente a segunda rotação é $q_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(i + j)$. Portanto,

$$q_1q_2 = \frac{1}{2}(1 + j)(1 + i) = \frac{1}{2}(1 + i + j - k).$$

Coloquemos o quatérnio na forma (2.7.1.) e note que a parte real é $\frac{1}{2} = cos\frac{\pi}{2}$. Logo,

$$q_2q_1 = cos\frac{\pi}{3} + \left[\frac{1}{\sqrt{3}}(i + j - k)\right] sen\,\frac{\pi}{3}.$$

Segue o resultado desta rotação sobre o vetor $p = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j - k)$ em torno do ângulo $\frac{2\pi}{3}$.

## 3 CONSIDERAÇÕES

Ao longo do desenvolvimento desse artigo foi possível acompanhar uma introdução dos números quatérnios junto com o estudo de suas propriedades. No decorrer do trabalho, também foi possível estudar a conexão dos números quatérnios com os vetores no espaço 3-dimensional.

## REFERÊNCIAS

EBBINGHAUS, H.-D.; HERMES, H.; HIRZEBRUCH, F.; KOECHER, M.; MAINZER, K.; NEUKIRCH, J.; PRESTEL, A.; REMMERT, R. **Graduate Texts in Mathematics, Readings in Mathematics:** Numbers. New York: Springer, 1991.

FELZENSZWALB, B. **Álgebra de dimensão finitas**. Rio de Janeiro*:* IMPA, 1979.

HAMILTON, W. R. **On Quaternions**; or on a new System of Imaginaries in Algebra, The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science 1844- 1850. (Algebra). 3rd. Cambridge: Cambridge University Press, 1967. Vol. xxv-xxxvi.

HURWITZ, A. **Ueber die Composition der quadratischen Formen von beliebig vielen Variablen.** Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, 1898. p. 309–316.

KANTOR, I. L.; SOLODOVNIKOV, A. S. **Hypercomplex Numbers: An elementary introduction to Algebras.** New York: [s. n.], 1989.