



RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

A APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM UM PROCESSO DE CAPITALIZAÇÃO: UMA INVESTIGAÇÃO PROPOSTA EM SALA DE AULA

THE APPLICATION OF DIFFERENTIAL EQUATIONS IN A CAPITALIZATION PROCESS: A PROPOSED CLASSROOM INVESTIGATION

LA APLICACIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES EN UN PROCESO DE CAPITALIZACIÓN: UNA INVESTIGACIÓN PROPUESTA EN EL AULA

Lucas da Silva França¹, Marivaldo Conceição Gonçalves²

e565353

<https://doi.org/10.47820/recima21.v5i6.5353>

PUBLICADO: 06/2024

RESUMO

O objetivo desse trabalho é demonstrar como as aplicações de cálculo diferencial em situações cotidianas podem ser simples e carregam um grande potencial de tornar o ensino de cálculo mais significativo para o aluno. Gostaríamos assim, de evidenciar fatores e práticas que contribuem para a absorção dos conhecimentos dentro de uma proposta de cálculo aplicado, neste caso, a um processo de capitalização composta. Dessa maneira, o presente artigo surgiu a partir de uma discussão ocorrida em sala de aula, em que era discutido com os alunos aplicações de equações diferenciais. Buscamos evidenciar fatores que possibilitam a real absorção do conteúdo, em que o processo de assimilação seja efetivo e não meramente mecânico e carregado de formalismo. Nos pomos, a partir da proposta de um aluno, a aplicar os conhecimentos envolvendo equações diferenciais. Aproveitando-se da riqueza que foi esse momento de discussão, modelagem da situação proposta e resolução do problema, sugerimos que no decorrer do ensino de cálculo o professor tenha momentos destinados ao trabalho prático do uso do cálculo, especialmente problemas reais com o viés investigativo. Por meio dessa experiência, podemos afirmar que é possível fazer com que o ensino de cálculo, através de metodologias que visam trabalhar com aplicações que possivelmente se inserem na realidade do estudante, tornam a aprendizagem significativa e corroboram para a compreensão do conhecimento estudado, sendo forte aliado dos trabalhos desenvolvidos na área de cálculo diferencial.

PALAVRAS-CHAVE: Equações diferenciais. Aplicações. Investigação. Capitalização.

ABSTRACT

The objective of this work is to demonstrate how the applications of differential calculus in everyday situations can be simple and carry great potential to make the teaching of calculus more meaningful for students. We aim to highlight factors and practices that contribute to the absorption of knowledge within a proposed applied calculus framework, in this case, to a compound capitalization process. Thus, this article emerged from a classroom discussion where the applications of differential equations were being discussed with students. We seek to highlight factors that enable the real absorption of content, where the assimilation process is effective and not merely mechanical and laden with formalism. Based on a student's suggestion, we applied the knowledge involving differential equations. Taking advantage of the richness of that moment of discussion, situation modeling, and problem-solving, we suggest that during the teaching of calculus, teachers allocate time for practical work on the use of calculus, especially real problems with an investigative bias. Through this experience, we can affirm that it is possible to make the teaching of calculus, through methodologies

¹ Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), licenciado em Matemática pela Universidade do Estado da Bahia (UNEB). Professor do Instituto Federal da Bahia (IFBA), campus Porto Seguro.

² Mestre em Matemática pela Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC), licenciado em Matemática pela Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB). Professor do Instituto Federal da Bahia (IFBA), campus Euclides da Cunha.



RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

A APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM UM PROCESSO DE CAPITALIZAÇÃO:
UMA INVESTIGAÇÃO PROPOSTA EM SALA DE AULA
Lucas da Silva França, Marivaldo Conceição Gonçalves

that aim to work with applications that potentially fit into the student's reality, meaningful and supportive of the understanding of the studied knowledge, being a strong ally of the work developed in the area of differential calculus.

KEYWORDS: *Differential Equations. Applications. Investigation. Capitalization.*

RESUMEN

El objetivo de este trabajo es demostrar cómo las aplicaciones del cálculo diferencial en situaciones cotidianas pueden ser simples y tienen un gran potencial para hacer que la enseñanza del cálculo sea más significativa para los estudiantes. Así, nos gustaría evidenciar factores y prácticas que contribuyen a la absorción del conocimiento dentro de una propuesta de cálculo aplicado, en este caso, a un proceso de capitalización compuesta. De esta manera, el presente artículo surgió a partir de una discusión ocurrida en el aula, en la que se discutían con los estudiantes aplicaciones de ecuaciones diferenciales. Buscamos aquí evidenciar factores que posibilitan la absorción real del contenido, en los que el proceso de asimilación sea efectivo y no meramente mecánico y cargado de formalismo. A partir de la propuesta de un alumno, aplicamos los conocimientos sobre ecuaciones diferenciales. Aprovechando la riqueza de ese momento de discusión, modelado de la situación propuesta y resolución del problema, sugerimos que, durante la enseñanza del cálculo, el profesor dedique momentos al trabajo práctico del uso del cálculo, especialmente a problemas reales con un enfoque investigativo. A través de esta experiencia, podemos afirmar que es posible hacer que la enseñanza del cálculo, mediante metodologías que buscan trabajar con aplicaciones que posiblemente se inserten en la realidad del estudiante, sea significativa y contribuya a la comprensión del conocimiento estudiado, siendo un fuerte aliado de los trabajos desarrollados en el área del cálculo diferencial.

PALABRAS CLAVE: *Ecuaciones Diferenciales. Aplicaciones. Investigación. Capitalización.*

1. INTRODUÇÃO

Atualmente, existe a necessidade de que os nossos alunos se tornem cada vez mais hábeis, para que ao serem inseridos no mercado de trabalho exerçam da melhor maneira possível as atividades que os competirão. Essa exigência acontece em todos os níveis de ensino, tendo maior peso na formação superior, visto que o objetivo das instituições que oferecem esse nível de ensino é o de especializar o estudante, visando suprir a necessidade de mão de obra nos diferentes setores da sociedade.

Nesta perspectiva de formação profissional, algo que muito se discute é o quão distante pode ser o que se trabalha em matemática na sala de aula e o que o futuro profissional vai se deparar no mundo do trabalho, futuro trabalho esse, que supostamente esse profissional foi preparado para realizar. É preciso que o que se está ensinando tenha sentido prático, seja aplicável ao mundo atual, pois, assim como trazido por D'Ambrósio (2012), "a sociedade moderna não será operacional com um instrumento intelectual obsoleto. Necessitamos de matemática de hoje." (p. 28).

É comum, ao se trabalhar com matemática em sala de aula, o surgimento de questionamentos a respeito de onde e quando certos conteúdos estudados serão usados, mas, por diversas vezes não são explorados no contexto educacional como deveriam, sendo que as



RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

A APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM UM PROCESSO DE CAPITALIZAÇÃO:
UMA INVESTIGAÇÃO PROPOSTA EM SALA DE AULA
Lucas da Silva França, Marivaldo Conceição Gonçalves

colocações, dúvidas e indagações realizadas pelos estudantes podem possuir, se explorados de forma correta, alto potencial no ensino dos conteúdos trabalhados.

D'Ambrósio (2012, p. 29) propõe que o ensino de matemática leve em consideração as situações mais imediatas vividas pelos alunos, pois aquilo que se apresenta materialmente ou intelectualmente mais próximas dos estudantes tem maior poder em motivá-los a estudar e explorar mais a fundo os temas propostos. Sendo assim, temos na vastidão de indagações realizadas pelos alunos, um universo de possibilidades para explorar nas aulas, com a vantagem de se ter a curiosidade deles como elemento propulsor no processo de aprendizagem.

Neste ano de 2024, ministrando um curso de férias de cálculo III, trabalhávamos o conteúdo de equações diferenciais. Em um dado dia que resolvíamos uma lista de situações-problemas envolvendo aplicações de equações diferenciais de primeira ordem – EDO, surgiu uma discussão na aula sobre taxa de rendimento de juros, de capitalização e plano de previdência privada. Nesse contexto, um aluno questionou se era possível analisar um plano de aposentadoria para ele fazendo uso de equações diferenciais.

Acredito que o motivo que o levou a realizar tal questionamento reside no fato de que discutíamos sobre taxas de variação, pois as equações diferenciais são aplicáveis a uma infinidade de situações que envolvem variações entre grandezas. Desse modo, decidimos explorar o questionamento do aluno para sanar a sua dúvida a respeito da situação apresentada e, em contrapartida, aplicar o conteúdo estudado de EDO em uma situação de realidade. Assim, objetivando, a partir da discussão em sala de aula e busca por atender a dúvida apresentada pelos alunos, responder à pergunta: “quais potencialidades existem na resolução de problemas práticos para o ensino de cálculo, mais especificamente de equações diferenciais?”

Ao permitir explorar o questionamento dos alunos e tentar alocar as ideias trazidas no contexto da sala de aula e do conteúdo trabalhado, o professor vai ao encontro do que nos traz Skovsmose (2013, p. 24), em que o pesquisador afirma que *“problemas não devem pertencer a ‘realidades de faz de conta’ sem nenhuma significação, exceto como ilustração da matemática como ciência das situações hipotéticas”*.

Baseado nessa ideia e tendo em vista que o objetivo da aula era trabalhar aplicações e dar significado prático ao conteúdo, nos abdicamos por um tempo de resolver os problemas de semirrealidade¹, ou, como nos traz Skovsmose (2013), *“realidades de faz de conta”*, e nos debruçamos sobre o problema real que emergiu de uma discussão político-social-econômica em sala de aula, que é um espaço não apenas de discursões dos conteúdos de maneira formal, mas também de suas aplicações na vida daqueles que estão envolvidos no processo de ensino e aprendizagem. Assim,

Ao falar de matemática rica em relações, enfatizo as relações com uma realidade já vivida mais do que com uma realidade falsa, inventada com o único propósito de

¹ Semirrealidade se refere à problemas matemáticos inspirados em situações reais. Problemas fictícios com o objetivo de rerepresentar uma certa realidade.



RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

A APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM UM PROCESSO DE CAPITALIZAÇÃO:
UMA INVESTIGAÇÃO PROPOSTA EM SALA DE AULA
Lucas da Silva França, Marivaldo Conceição Gonçalves

servir como exemplo de aplicação. [...] A realidade já vivida deveria ser a espinha dorsal que une experiências matemáticas". (Skovsmose, 2013, p. 27)

A partir da experiência vivida pelos alunos e dos conhecimentos existentes tanto de estudos de matemática financeira quanto dos estudos de cálculo, nos pusemos a discutir sobre as relações existentes entre essas áreas do conhecimento matemático. Também exploramos outras informações econômicas, permitindo que pudéssemos fazer uso dos conhecimentos prévios sobre finanças, economia e taxas de juros para tornar o processo de aprendizagem mais rico e significativo. Corroborando com as ideias de Ausubel (1978, 1980, *apud* Moreira, 2006, p. 55) de que *"Aquila que o aluno já sabe, isto é, seu conhecimento prévio, parece ser o fator isolado que mais influência a aprendizagem subsequente"*.

O modo particular como as pessoas veem o mundo a sua volta faz com que existam diferentes interesses, visões diferentes sobre o que é ou não interessante a ser explorado, por isso, é interessante que o professor esteja atento aos possíveis temas e assuntos que engajem todos os alunos, ou, pelo menos, a maior parte deles.

As pessoas tendem a ver situações de modos distintos, pois enxergam fatos por perspectivas diferentes, isso devido à subjetividade de cada indivíduo, que é reflexo do contexto no qual ele se insere, da sua realidade, das experiências vividas, das suas referências e dos sonhos que tem. Por isso, quando estudantes discutem acerca de um problema real, eles aprendem juntos, a partir de um diálogo democrático, a respeitar a opinião e a visão das outras pessoas (Mesquita, 2021, p. 15).

Assim como nos traz Mesquita (2021), temos por objetivo geral o de evidenciar como a exploração de problemas reais é significativo no processo de ensino-aprendizagem de matemática, mais especificamente, do cálculo diferencial e integral. Por conseguinte, também objetivamos mostrar a importância de: engajar o aluno na aplicação do conhecimento estudado; explorar problemas de realidade em conteúdos específicos de matemática; e, promover a busca para a resolução de situações-problema de forma conjunta.

Dessa maneira, além dos objetivos elencados no parágrafo anterior, o desenvolvimento da atividade e investigação realizada em sala de aula tratou de mostrar, por meio do uso de um modelo matemático, como o cálculo diferencial pode ser utilizado para auxiliar na resolução de problemas ligados ao uso de matemática financeira, nesse caso específico, capitalizações compostas. Tomamos como incentivo para o processo investigativo o interesse apresentado pelos alunos e a possibilidade de exploração dentro do conteúdo trabalhado.

2. O PROBLEMA E A COLETA DE DADOS

Depois da discussão e organização das ideias sobre o que almejávamos resolver acerca da proposta levantada sobre um plano de aposentadoria, chegamos ao problema:

Problema: Um aluno graduando em licenciatura, receoso pelo seu futuro financeiro, deseja complementar sua aposentadoria que acontecerá em média daqui a 35 anos, realizando depósitos



RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

A APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM UM PROCESSO DE CAPITALIZAÇÃO:
UMA INVESTIGAÇÃO PROPOSTA EM SALA DE AULA
Lucas da Silva França, Marivaldo Conceição Gonçalves

em sua poupança. Considerando que o aluno já possui um montante de R\$ 5400,00 e almeje realizar a partir de agora depósitos mensais no valor de R\$ 200,00 por mês ao longo dos próximos 35 anos, qual será a quantia que ele possuirá quando se aposentar?

Antes de iniciar o processo de escolha de modelo e modelagem do problema proposto, discutimos qual seria o melhor tipo de investimento de renda fixa, mas, optamos pela análise do investimento na poupança, por ser o mais simples de encontrar informações sobre taxas e suas variações. De qualquer forma, o modelo usado para análise de depósitos sucessivos em uma poupança seria o mesmo utilizado para qualquer outra situação parecida. Caso os alunos se interessassem em explorar um pouco mais, bastaria realizar a mudança dos parâmetros analisados.

Dado a situação proposta, nos pusemos a buscar informações que seriam necessárias à análise e solução do mesmo. Inicialmente buscamos na internet a taxa de juros para o período analisado. Buscando com que o resultado fosse o mais fiel possível à realidade, pressupondo a manutenção da taxa atual para todo o período analisado, encontramos no site do Banco Central do Brasil uma tabela com informações sobre a taxa de rendimento da poupança no mês de janeiro de 2024.

		Remuneração básica	Remuneração adicional	Remuneração total
11/01/2024	11/02/2024	0,0934	0,5000	0,5939
12/01/2024	12/02/2024	0,0706	0,5000	0,5710
13/01/2024	13/02/2024	0,0427	0,5000	0,5429
14/01/2024	14/02/2024	0,0427	0,5000	0,5429
15/01/2024	15/02/2024	0,0717	0,5000	0,5721
16/01/2024	16/02/2024	0,0713	0,5000	0,5717
17/01/2024	17/02/2024	0,0689	0,5000	0,5692
18/01/2024	18/02/2024	0,0415	0,5000	0,5417
19/01/2024	19/02/2024	0,0099	0,5000	0,5099
20/01/2024	20/02/2024	0,0089	0,5000	0,5089

Fonte: Banco Central do Brasil

Na busca pela taxa de rendimento da poupança, ou, como trazido na tabela, remuneração total, descobrimos que ela é composta por uma parte variável, chamada de remuneração básica, e outra parte pré-fixada chamada de remuneração adicional, sendo que a soma das duas compõem a taxa de rendimento da poupança. O fato de que o rendimento é composto por uma parte fixa e outra variável gerou discussões interessantes em sala de aula, pois o fato permite inferir que a poupança sempre terá rendimento acima do meio ponto percentual (0,5%).



RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

A APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM UM PROCESSO DE CAPITALIZAÇÃO:
UMA INVESTIGAÇÃO PROPOSTA EM SALA DE AULA
Lucas da Silva França, Marivaldo Conceição Gonçalves

Tomamos dez dias referentes ao mês de janeiro de 2024 para realizar uma média do rendimento da poupança no período, valor que seria usado como referência para resolver o problema. Fizemos a média dos dez primeiros períodos listados, chegamos ao valor de 0,55242 % como taxa de rendimento mensal da poupança. A média foi necessária visto a variação da taxa em diferentes períodos de tempo.

Depois das discussões iniciais, construção do problema a ser resolvido e do levantamento das informações básicas, partimos para a escolha das ferramentas matemáticas para solucionar o problema, nesse caso, ferramentas provenientes do estudo das equações diferenciais. Por termos feito uma média e encontrado um valor percentual que seria aplicado a todo o período analisado, os alunos já tomaram que o modelo deveria envolver a variação do capital com o tempo e que essa taxa de variação seria constante e igual ao valor da taxa de juros da poupança.

3. A IMPORTÂNCIA E O USO DAS EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA A INTERPRETAÇÃO DE SISTEMAS REAIS

O Cálculo e suas aplicações possuem grande importância nas mais diversas áreas das ciências, sejam essas ligadas às ciências naturais, como é o caso da análise do crescimento de populações, ou na análise da meia vida de uma determinada substância na natureza. Ainda podem ser ligadas às análises psicológicas sobre curvas de aprendizagem que visam verificar como se dá a apropriação de um conhecimento de alguém ao longo de uma etapa determinada, ou, como será nosso caso em específico, analisar por meio das ferramentas fornecidas pelo cálculo, qual resultado teremos para o problema proposto em sala de aula.

Das múltiplas maneiras possíveis de se desenvolver uma análise econômica por meio das ferramentas fornecidas pelo cálculo, optaremos aqui pelo uso das equações diferenciais, dado que essa é uma ferramenta que nos permite calcular a evolução dos sistemas, facilitando a extração de informações e ajudando a prever o comportamento do sistema ao longo do tempo.

As equações diferenciais têm uma importância muito grande nas aplicações de matemática. Sempre que indagamos sobre a evolução de um dado fenômeno susceptível de tratamento matemático, do qual sabemos algo sobre como varia no tempo, estaremos pretendendo resolver uma equação diferencial. (Leithold, 1994, p. 1131).

As equações diferenciais ordinárias podem ser aplicadas em diversas áreas, e essas possibilidades de aplicações é que fazem as EDO's serem tão importantes. Em termos de uso como modelo matemático, as EDO's são adequadas quando o sistema a ser analisado envolve variáveis contínuas que por sua vez estão relacionadas a outras variáveis contínuas, assim o sistema pode ser analisado em qualquer ponto de interesse, desde que se verifique as relações de dependência e independência entre as variáveis por meio de análises feitas sobre taxas de variação (Bassanezi, 2010).

No livro Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática, Bassanezi (2010) propõe modelos de crescimento e decrescimento exponencial para diferentes usos, como para



RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

A APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM UM PROCESSO DE CAPITALIZAÇÃO:
UMA INVESTIGAÇÃO PROPOSTA EM SALA DE AULA
Lucas da Silva França, Marivaldo Conceição Gonçalves

desintegração radioativa, crescimento celular e capitalizações. Atendendo à nossa demanda frente a situação que desejávamos solucionar, fizemos uso do modelo de capitalização.

4. MODELAGEM E SOLUÇÃO DA SITUAÇÃO-PROBLEMA

Segundo Bassanezi (2010), o modelo matemático que atende a este problema é de uma equação diferencial de primeira ordem que possui a seguinte forma

$$\frac{dc}{dt} = rc$$

Esse modelo matemático relaciona um capital c atualizado continuamente (ou seja, o capital c se trata do valor do capital atualizado ao final de cada período), com uma taxa de crescimento r (taxa de juros encontrado em nossa busca no site do Banco Central do Brasil), por unidade de tempo t . De modo simplista, a variação do capital no tempo depende do capital c , atualizado mês a mês, e da taxa de juros r , tomada como constante, advinda da média feita a partir dos dados tomados da tabela do Banco Central do Brasil.

Dúvidas surgiram sobre o capital c , pois alguns alunos ficaram na dúvida sobre o capital inicial que o aluno citado no problema disse ter guardado em poupança. Para sanar tais dúvidas discutimos sobre o fato do capital ser variável ou constante, o que de forma unânime os alunos alegaram ser variável, pois o valor mudava como forme incidiam as taxas e os depósitos sucessivos eram realizados. A partir dessa breve discussão, alguns alunos trouxeram o fato de que o valor de capital que o problema traz se trata de um constante e que o nosso problema se tratava de um Problema de Valor Inicial (PVI)¹. Daí para frente, aparadas as arestas, deu-se continuidade à resolução do problema.

A equação diferencial $\frac{dc}{dt} = rc$, em que $\frac{dc}{dt}$ representa uma taxa de variação entre o capital e o tempo, indicando por rc que essa taxa é proporcional ao seu valor a cada instante, devemos adicionar a expressão uma constante k que representará os depósitos que acontecerão de forma sucessiva, nos dando a seguinte expressão

$$\frac{dc}{dt} = rc + k$$

A constante k deve ser positiva, já que nesse problema o objetivo é efetuar depósitos sucessivos. Mas, se ao invés de depósitos o enunciado sugerisse retiradas sucessivas, a constante k admitiria apenas valores negativos. Como não é esse o caso, tomemos

¹ O Problema de Valor Inicial ou, como conhecido no estudo das Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), tratam de problemas envolvendo a encontrada de soluções específicas paras as EDO. Quando se resolve uma EDO é comum encontrarmos uma solução geral para a equação, mas, quando o problema fornece algum valor específico ou um valor inicial, podemos substituí-lo na solução e encontrar as constantes específicas.



RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

A APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM UM PROCESSO DE CAPITALIZAÇÃO:
UMA INVESTIGAÇÃO PROPOSTA EM SALA DE AULA
Lucas da Silva França, Marivaldo Conceição Gonçalves

$$\frac{dc}{dt} = rc + k$$

A equação diferencial acima é uma equação linear de 1ª ordem, podendo ser facilmente resolvida com método próprio. O método baseia-se em encontrar um fator integrante e multiplicar toda a equação por ele, depois integrar os dois membros da equação. Para tal, devemos escrever a equação na forma destacada em (1), o que transforma o modelo destacado acima na equação apresentada em (2).

$$\frac{dc}{dt} + P(t)c = Q(t) \quad (1)$$

$$\frac{dc}{dt} - rc = k \quad (2)$$

$$P(t) = -r, Q(t) = k$$

Para encontrar o fator de integração, chamado aqui de $u(t)$, fazamos o cálculo abaixo, e o resultado obtido multipliquemos pela equação diferencial em (2).

$$u(t) = e^{\int P(t)dt}$$

Fator de integração \rightarrow

$$\rightarrow u(t) = e^{\int -rdt}$$

$$\rightarrow u(t) = e^{-rt}$$

Logo após encontrarmos o fator de integração, multipliquemos toda equação diferencial por ele. Mas, aproveitamos para ressaltar que ao multiplicar uma EDO linear de primeira ordem pelo fator de integração, esse transforma o lado direito da igualdade na derivada de um produto, que por sua vez, ao ser integrado, gera como resposta o produto do fator de integração pela variável dependente, que em nosso caso é o valor do capital c .

$$e^{-rt} \frac{dc}{dt} - e^{-rt}rc = e^{-rt}k$$

$$\frac{d(e^{-rt}c)}{dt} = e^{-rt}k$$

Integrando ambos os membros da equação em função de t , temos

$$\int \frac{d(e^{-rt}c)}{dt} = \int e^{-rt}k dt$$

$$e^{-rt}c = -\frac{k}{r} \int e^{-rt}(-r) dt$$



RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

A APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM UM PROCESSO DE CAPITALIZAÇÃO:
UMA INVESTIGAÇÃO PROPOSTA EM SALA DE AULA
Lucas da Silva França, Marivaldo Conceição Gonçalves

$$e^{-rt}c = -\frac{k}{r} \cdot e^{-rt} + C_1$$

Multiplicando ambos os membros por e^{rt} , obteremos

$$\text{Solução geral} \quad c = -\frac{k}{r} + C_1 e^{rt} \text{ ou } c(t) = C_1 e^{rt} - \frac{k}{r} \quad (3)$$

Visando resolver o problema proposto, temos que nos atentar ao fato de que o aluno sugeriu que depositaria mensalmente a quantia de R\$ 200,00 e que iniciaria os depósitos já possuindo em conta um capital de R\$ 5400,00, que juntamente com os sucessivos depósitos também será capitalizado. Sendo assim, no instante de tempo $t = 0$, o capital inicial é dado por $c(t_0) = c_0$, o que nos permitirá particularizar a equação diferencial dada. Este tipo de situação no estudo das EDO, como já colocado anteriormente, trata-se de um (PVI). Dado um valor inicial para as variáveis dependente e independente, podemos encontrar o valor da constante que aparece na equação após termos encontrado a solução geral para a EDO.

Dando continuidade ao cálculo, tomemos $t=0$ para obtermos o capital inicial do investimento

$$c(t_0) = C_1 e^{r \cdot 0} - \frac{k}{r}$$

$$c_0 = C_1 - \frac{k}{r}$$

$$C_1 = c_0 + \frac{k}{r}$$

Encontrado o valor para a constante C_1 , substituindo em nossa equação geral encontrada em (3), obteremos a equação em (4)

$$c(t) = (c_0 + \frac{k}{r})e^{rt} - \frac{k}{r}$$

$$c(t) = c_0 e^{rt} + \frac{k}{r} e^{rt} - \frac{k}{r}$$

$$c(t) = c_0 e^{rt} + \frac{k}{r} (e^{rt} - 1) \quad (4)$$

Assim, temos uma relação que nos permitirá definir quanto o aluno possuirá em sua poupança daqui os 35 anos sugeridos. É importante ressaltar aqui que poderíamos ter substituído o valor inicial R\$ 5400,00 na poupança para o valor de tempo igual a zero anteriormente, mas, em



RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

A APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM UM PROCESSO DE CAPITALIZAÇÃO:
UMA INVESTIGAÇÃO PROPOSTA EM SALA DE AULA
Lucas da Silva França, Marivaldo Conceição Gonçalves

virtude de termos mais possibilidades a serem exploradas em sala, deixamos que os parâmetros fossem substituídos apenas no final. Deste modo, cada aluno poderia depois analisar os eu próprio plano de aposentadoria, mudando as taxas, mudando o valor inicial em sua conta e o tamanho dos depósitos mensais que iriam realizar em suas simulações.

Resolvendo agora o problema inicial desencadeador de toda a investigação, tomando que o aluno iniciou a efetuar seus depósitos no valor de R\$ 200,00 e possuía em conta um montante de R\$ 5400,00, tendo como taxa r de juros igual a 0,55242 % e que o dinheiro será aplicado um período de tempo t igual a 35 anos, que implica em 420 meses, teremos

$$c(t) = c_0 e^{rt} + \frac{k}{r} (e^{rt} - 1)$$

$$c(420) = 5400 e^{0,0055242 \cdot 420} + \frac{200}{0,0055242} (e^{0,0055242 \cdot 420} - 1)$$

$$c(420) = 5400 \cdot 10,17734325 + \frac{200}{0,0055242} \cdot 9,177343254$$

$$c(420) = 387\,217,28 \quad (5)$$

Deste modo, a solução para o problema investigado em sala de aula deu o resultado apresentado em (5). Ou seja, caso o aluno do problema investigado resolva depositar todos os meses, durante um período de 35 anos, a taxa de juros mensal próxima à levantada para o período inicial do presente ano de 2024, partindo de um montante inicial em sua conta de R\$ 5400,00, ele terá em conta um valor de R\$ 387217,28.

5. CONSIDERAÇÕES

No presente trabalho, objetivamos mostrar como situações corriqueiras de sala de aula podem ser exploradas de modo a tornar o processo de ensino-aprendizagem mais rico e mais significativo para o aluno, em que ele possa participar efetivamente do processo educacional, não sendo um mero repetidor de exercícios. Desse modo, Azevedo (2022, p. 217), nos traz que:

[...] torna-se importante pensar a formação em Matemática dos alunos que esteja à altura deste tempo. Uma formação em Matemática que promova aspectos de insubordinação à pedagogia do treinamento e que, ao mesmo tempo, valorize a produção investigativa e intelectualmente emancipatória do estudante.

Sendo estes tempos outros e com demandas próprias, o trabalho educacional desenvolvido no contexto social vivido, nos permite fugir das ideias pré-concebidas de que a matemática é estática. Dar liberdade para que o estudante escolha o problema, estipule os parâmetros, colete os dados



RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR ISSN 2675-6218

A APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM UM PROCESSO DE CAPITALIZAÇÃO:
UMA INVESTIGAÇÃO PROPOSTA EM SALA DE AULA
Lucas da Silva França, Marivaldo Conceição Gonçalves

necessários à resolução da situação proposta pode tornar o ensino de Matemática mais significativo, pois o estudante se coloca como protagonista no processo.

No que concerne ao ensino de equações diferenciais, pudemos notar que é grande o potencial existente numa proposta de trabalho como este aqui apresentado, em que o aluno toma para si o compromisso de ajudar a solucionar um problema que ele mesmo propôs e, como nos traz Barbieri (2023, p. 29), *“que nem sempre há uma única possibilidade de decisão adequada, [...] podendo se deparar com diversas soluções para a resolução de uma mesma situação”*.

Diferente de exercícios e problemas propostos comumente nas aulas, uma situação real explorada nesse ambiente nos traz um universo rico em possibilidades, pois podemos explorar a volatilidade ao nosso redor, tendo em vista que os dados envolvidos na resolução dos cálculos matemáticos nunca são tão bem definidos quanto os dados fornecidos nos problemas dos livros e listas de exercícios.

São inúmeras as possibilidades quando trabalhamos num contexto exploratório em matemática, pois precisamos tomar decisões a todo momento sobre como agir a respeito das variáveis selecionadas, visto que a cada etapa surgem novos elementos que precisam ser analisados. Atividades assim permitem que os alunos vejam na prática o uso dos conhecimentos estudados, tornando o ensino mais significativo.

Por fim, esperamos ter cumprido o objetivo de explicitar a importância do trabalho investigativo no processo de ensino-aprendizagem de equações diferenciais, visto a grande dificuldade apresentada pelos alunos nas disciplinas de cálculo. Trouxemos neste artigo uma possibilidade de atividade não distante das possibilidades de qualquer professor, exigindo apenas dar ouvidos às indagações e anseios dos alunos quanto ao que esperar do que se está sendo estudado.

REFERÊNCIAS

AZEVEDO, Greiton Toledo de; MALTEMPI, Marcus Vinicius; POWELL, Arthur Belford. **Contexto formativo de invenção robótico-matemática**: pensamento computacional e matemática crítica. *Bolema: boletim de educação matemática*, Rio Claro - SP, v. 36, n. 72, p. 214-238, 2022. DOI <https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n72a10>. Acesso em: 5 jan. 2024.

BARBIERE, Leandra. **Educação Financeira**: Uma Proposta Didática Explorando Ambientes de Aprendizagem à Luz da Matemática Crítica. Orientadora: Profa. Dra. Rosane Rossato Binotto. 2021. 84f. Dissertação (Mestrado Profissional em Rede Nacional - PROFMAT) - Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, SC, 2021. Disponível em: <https://rd.uffs.edu.br/handle/prefix/4609>. Acesso em: 13 dez. 2023.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. 3 ed. São Paulo - SP: Contexto, 2010. p. 389.

BRASIL. BANCO CENTRAL DO BRASIL. **Remuneração dos depósitos de poupança**. Brasília: Banco Central, 2024. Disponível em: <https://www.bcb.gov.br/estatisticas/remuneradepositospoupanca>. Acesso em: 25 fev. 2024.



RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

A APLICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS EM UM PROCESSO DE CAPITALIZAÇÃO:
UMA INVESTIGAÇÃO PROPOSTA EM SALA DE AULA
Lucas da Silva França, Marivaldo Conceição Gonçalves

LEITHOLD, Louis. **O Cálculo com Geometria Analítica**. 3. ed. São Paulo – SP: HARBRA, 1994. p. 686-1178. Vol 2.

MESQUITA, Milene Nagila; CEOLIM, Amauri Jersi; CIBOTTO, Rosefran Adriano Gonçalves. Modelagem matemática na perspectiva da educação matemática crítica: abordagens na educação básica. **Revista Brasileira de Educação**, Campo Mourão - PR, v. 26, 2021. DOI <https://doi.org/10.1590/S1413-24782021260022>. Acesso em: 5 jan. 2024.

MOREIRA, Marco Antonio. **A teoria da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Universidade de Brasília, 2006. 186 p. ISBN 85-230-0826-8.

SKOVSMOSE, Ole. **Educação Matemática Crítica: a questão da democracia**. Tradução: Abigail Lins, Jussara de Loyola Araújo; prefácio Marcelo C. Borba. 6. ed. Campinas, SP: Papirus, 2013. 160 p. (Coleção perspectivas em Educação Matemática).