v7.n6.2026

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

A EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES FRACAS PARA EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARCIAIS ELÍPTICAS VIA TEOREMA DE LAX-MILGRAM

THE EXISTENCE OF WEAK SOLUTIONS TO ELLIPTIC PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS VIA THE LAX–MILGRAM THEOREM

LA EXISTENCIA DE SOLUCIONES DÉBILES PARA ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES ELÍPTICAS VÍA EL TEOREMA DE LAX–MILGRAM

Marcos João Púcuta[1]

e767984
https://doi.org/10.47820/recima21.v7i6.7984

PUBLICADO: 06/2026

RESUMO
Este artigo aborda a teoria de soluções fracas para equações diferenciais parciais (EDPs) elípticas lineares, aplicando o Teorema de Lax–Milgram como ferramenta central da Análise Funcional. Diante das restrições impostas pelas formulações clássicas, torna-se natural recorrer aos espaços de Lebesgue e de Sobolev, nos quais as soluções são compreendidas em um sentido fraco, possibilitando o estudo de problemas cujas derivadas não existem no sentido clássico. Inicialmente, apresentam-se os conceitos basilares dos espaços funcionais envolvidos, com ênfase nos espaços de Hilbert e Sobolev e na desigualdade de Poincaré, essencial à obtenção da coercividade das formas bilineares associadas aos operadores elípticos. Em seguida, com base no Teorema de Representação de Riesz, demonstra-se o Teorema de Lax–Milgram e analisam-se as condições de continuidade e coercividade necessárias à existência e unicidade de soluções fracas em problemas variacionais. A metodologia utilizada consistiu na revisão bibliográfica de abordagem dedutiva, estruturada em três etapas: estudo dos espaços funcionais; desigualdade de Poincaré e formulação variacional; e a utilização desse Teorema à caracterização de problemas bem-postos no sentido de Hadamard. Também foram obtidas estimativas a *priori*, fundamentais para o controle e a estabilidade das soluções. Como resultado, verificou-se que o Teorema de Lax–Milgram constitui um método rigoroso para garantir a existência e a unicidade de soluções fracas de EDPs elípticas lineares. A sua aplicação ao problema de Poisson confirmou a eficácia da formulação variacional e dos métodos funcionais na análise de EDPs.

PALAVRAS-CHAVE: Teorema de Lax-Milgram. EDPs Elípticas. Espaços de Sobolev. Formulação variacional. Soluções Fracas.

ABSTRACT
This paper addresses the theory of weak solutions for linear elliptic partial differential equations (PDEs), applying the Lax–Milgram Theorem as a central tool of Functional Analysis. In view of the restrictions imposed by classical formulations, it becomes natural to resort to Lebesgue and Sobolev spaces, in which solutions are understood in a weak sense, enabling the study of problems whose derivatives do not exist in the classical sense. We present the basic concepts of the involved function spaces, with emphasis on Hilbert and Sobolev spaces and on the Poincaré

[1] Doutor em Ciências Pedagógicas pela Universidade de Ciências Pedagógicas Enrique José Varona (UCPEJV), Cuba. Área de Especialização: Análise Matemática com Integração das Tecnologias de Informação e Comunicação. Mestre em Matemática Pura, pela Universidade de Cabo Verde, Faculdade de Ciências e Tecnologia (FCT), convénio com a Universidade de Coimbra, Portugal. Área de Especialidade: Equações Com Derivadas Parciais. Docente universitário e chefe de Departamento de Ciências da Natureza e Ciências Exatas do Instituto Superior de Ciências de Educação (ISCED) de Cabinda /Angola.

inequality, which is essential to obtain coercivity of the bilinear forms associated with elliptic operators. Based on the Riesz Representation Theorem, we prove the Lax–Milgram Theorem and analyze the continuity and coercivity conditions required for the existence and uniqueness of weak solutions in variational problems. The methodology used consisted of a bibliographic review with a deductive approach, structured in three stages: study of function spaces; Poincaré inequality and variational formulation; and the use of the theorem to characterize well-posed problems in the sense of Hadamard. A priori estimates, which are fundamental for the control and stability of solutions, are also obtained. As a result, it was verified that the Lax–Milgram Theorem constitutes a rigorous method to guarantee the existence and uniqueness of weak solutions for linear elliptic PDEs. Its application to the Poisson problem confirmed the effectiveness of the variational formulation and functional methods in the analysis of PDEs.

KEYWORDS: *Lax-Milgram Theorem. Elliptic PDEs. Sobolev Spaces. Variational Formulation. Weak Solutions.*

RESUMEN
Este artículo aborda la teoría de soluciones débiles para ecuaciones diferenciales parciales (EDP) elípticas lineales, aplicando el Teorema de Lax–Milgram como herramienta central del Análisis Funcional. Ante las restricciones impuestas por las formulaciones clásicas, resulta natural recurrir a los espacios de Lebesgue y de Sobolev, donde las soluciones se entienden en sentido débil, permitiendo estudiar problemas cuyas derivadas no existen clásicamente. Se presentan los conceptos básicos de los espacios funcionales, con énfasis en Hilbert y Sobolev y en la desigualdad de Poincaré, esencial para la coercividad de formas bilineales asociadas a operadores elípticos. Con base en el Teorema de Representación de Riesz, se demuestra el Teorema de Lax–Milgram y se analizan las condiciones de continuidad y coercividad necesarias para existencia y unicidad de soluciones débiles en problemas variacionales. La metodología utilizada consistió en una revisión bibliográfica deductiva, estructurada en tres etapas: estudio de los espacios funcionales, desigualdad de Poincaré y formulación variacional, y el uso de dicho teorema para caracterizar problemas bien planteados en el sentido de Hadamard. También se obtuvieron estimaciones a priori, fundamentales para el control y la estabilidad de las soluciones. Como resultado, se verificó que el Teorema de Lax–Milgram constituye un método riguroso para garantizar la existencia y unicidad de soluciones débiles de EDP elípticas lineales. Su aplicación al problema de Poisson confirmó la eficacia de la formulación variacional y de los métodos funcionales en el análisis de EDP.

PALABRAS CLAVE: *Teorema de Lax-Milgram. EDP Elípticas. Espacios de Sobolev. Formulación variacional. Soluciones Débiles.*

INTRODUÇÃO

As equações diferenciais parciais (EDPs) elípticas desempenham um papel fundamental na modelagem de fenômenos físicos e de engenharia em regime estacionário, como potenciais eletrostáticos (equação de Poisson), deformações de sólidos (elasticidade linear) e problemas de equilíbrio térmico. Sua importância estende-se a áreas como finanças, biologia matemática e processamento de imagens, o que torna seu estudo relevante tanto do ponto de vista teórico quanto prático.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

A formulação clássica dessas equações requer soluções de classe C^2 que satisfaçam a equação pontualmente, o que constitui uma hipótese excessivamente restritiva em diversos contextos de interesse. Em particular, a presença de domínios irregulares, coeficientes descontínuos, termos-fonte pouco regulares e condições de contorno mistas podem inviabilizar a existência ou comprometer a regularidade de soluções clássicas.

Diante dessas limitações, generaliza-se o conceito de solução por meio de uma formulação variacional, introduzindo-se a noção de solução fraca. Nessa abordagem, as derivadas são transferidas, via integração por partes, para funções de teste suaves, reduzindo as exigências impostas à incógnita, que passa a pertencer a um espaço de Sobolev, no qual as derivadas são entendidas no sentido das distribuições. Esse arcabouço funcional acomoda dados pouco regulares e geometrias complexas, além de viabilizar a aplicação de ferramentas da Análise Funcional, como os teoremas de Lax–Milgram e de Representação de Riesz, os quais garantem existência, unicidade e estabilidade das soluções caracterizando, assim, o problema como bem-posto no sentido de Hadamard.

Nesse cenário, o Teorema de Lax–Milgram assume papel central: ao estabelecer as condições de continuidade e coercividade em espaços de Hilbert, ele não apenas assegura a existência e unicidade da solução fraca, como também fornece estimativas *a priori* essenciais ao controle da norma e à estabilidade do sistema. Essa construção garante o caráter bem-posto do modelo, consolidando a estrutura teórica necessária para a aplicação rigorosa de métodos numéricos, como o método dos elementos finitos.

Assim, a teoria de soluções fracas supera as limitações da abordagem clássica e fornece um alicerce unificado para a análise teórica e numérica das EDPs elípticas lineares.

Formulação do problema

Seja $\Omega \subset R^n$ um domínio aberto, limitado e com fronteira regular. Considera-se o problema de valor de contorno elíptico linear de segunda ordem com condição de Dirichlet homogênea:

$$\begin{cases} Lu = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

onde

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u.$$

A formulação clássica desse problema exige soluções suficientemente regulares, o que limita sua aplicação em diversos contextos físicos e matemáticos. Para contornar essa

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

dificuldade, o problema é reformulado no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$, permitindo interpretar as derivadas em sentido fraco e incorporar as condições de fronteira.

Multiplicando a equação por uma função teste $v \in H_0^1(\Omega)$ e aplicando integração por partes, obtém-se a formulação variacional:

$$a(u,v) = F(v), \quad \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

na qual $a(.,.)$ representa a forma bilinear associada ao operador elíptico e F um funcional linear contínuo.

À luz do exposto, surge a seguinte questão científica: De que maneira o Teorema de Lax–Milgram garante a existência e a unicidade de soluções fracas para EDPs elípticas lineares?

A resposta fundamenta-se na verificação das propriedades de continuidade e coercividade da forma bilinear $a(.,.)$, condições que permitem aplicar o teorema e concluir a existência de uma única solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$.

Este artigo tem como objetivo estudar a existência e a unicidade de soluções fracas para equações diferenciais parciais elípticas lineares utilizando o Teorema de Lax–Milgram, no contexto dos espaços de Sobolev.

Os objetivos específicos deste trabalho concentram-se em apresentar os principais conceitos relacionados aos espaços de Hilbert, Lebesgue e Sobolev, bem como as noções de derivadas fracas e do espaço $H_0^1(\Omega)$, fundamentais para a formulação fraca das EDPs elípticas; demonstrar a desigualdade de Poincaré e analisar sua importância na obtenção da coercividade de formas bilineares; estudar formas bilineares contínuas e coercivas, estabelecendo as hipóteses do Teorema de Lax–Milgram; demonstrar e aplicar esse Teorema a problemas variacionais associados às equações diferenciais parciais elípticas; e por fim, estabelecer a existência e a unicidade de soluções fracas para o problema de Poisson, destacando o papel das estimativas *a priori* e da noção de problema bem-posto.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Esta seção apresenta os fundamentos da Análise Funcional e a teoria dos espaços de funções indispensáveis à construção da formulação variacional de equações diferenciais parciais elípticas. A discussão concentra-se na estrutura dos espaços de Lebesgue (L^p) e de Sobolev ($W^{k,p}$), os quais fornecem a base funcional necessária para a definição de derivadas fracas.

Além disso, enuncia-se o Teorema de Lax-Milgram e sua aplicação ao problema de Poisson.

Definição 1. (**Norma**). Seja E um espaço vetorial qualquer. Uma norma em E é uma função real

$$\|.\| : E \to R$$
$$u \mapsto \|u\|$$

que a cada elemento de E associa um número real, satisfazendo as seguintes propriedades:

1. $\|u\| \geq 0 \ \forall\, u \in E$ e $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0,$
2. $\|\alpha u\| = |\alpha|\|u\|, \ \forall\, \alpha \in K, \ \forall\, u \in E,$
3. $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|, \ \forall\, u, v \in E$ (Desigualdade Triangular).

Diz-se que o par $(E, \|.\|)$ é um espaço vetorial normado.

Lema 1 (Desigualdade de Cauchy-Schwarz). Se $(H, \langle u, v\rangle)$ é um espaço com produto interno com a norma $\|.\|$, então, para quaisquer $u, v \in H$, tem-se

$$\|\langle u, v\rangle\| \leq \|u\|\|v\| \ ,$$

onde a igualdade ocorre se, e somente se, u e v são linearmente dependentes.

Demonstração

Se $v = 0$, tem-se que $\langle u, 0\rangle = \langle u, 0 + 0\rangle = \langle u, 0\rangle + \langle u, 0\rangle$ para todo $u \in H$.

Logo, $\langle u, 0\rangle = 0$ para todo $u \in H$, e, analogamente, $\langle 0, u\rangle = 0$. Além disso, $\|u\|\|0\| = 0$ o que implica $|\langle u, 0\rangle| \leq \|u\|\|0\|$.

Suponha que $v \neq 0$. Para quaisquer $u, v \in H$ e $\lambda \in K$, considere a norma ao quadrado de $u - \lambda v$. Então:

$$0 \leq \|u - \lambda v\|^2 = \langle u - \lambda v, u - \lambda v\rangle = \langle u, u\rangle - \lambda\langle v, u\rangle - \bar{\lambda}\langle u, v\rangle + |\lambda|^2\langle v, v\rangle$$
$$= \|u\|^2 - \lambda\langle v, u\rangle - \bar{\lambda}\langle u, v\rangle + |\lambda|^2\|v\|^2$$

Tomando $\lambda = \frac{\langle u,v\rangle}{\|v\|^2}$ (o valor que minimiza a expressão), temos

$$\lambda\langle v, u\rangle = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\langle v, u\rangle = \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2},$$

e analogamente

$$\bar{\lambda}\langle u, v\rangle = \frac{\langle v, u\rangle}{\|v\|^2}\langle u, v\rangle = \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2}.$$

Substituindo essas expressões na desigualdade, temos:

$0 \leq \|u\|^2 - \lambda\langle v, u\rangle - \bar{\lambda}\langle u, v\rangle + |\lambda|^2\|v\|^2$, tem-se:

$$0 \leq \|u\|^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} + \left(\frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\right)^2 \|v\|^2$$
$$= \|u\|^2 - 2\left(\frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2}\right) + \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^4}\|v\|^2$$

$$= \|u\|^2 - 2\frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} + \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2}$$

$$= \|u\|^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2}$$

Assim,

$$0 \leq \|u\|^2 - \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} \Leftrightarrow \frac{|\langle u, v\rangle|^2}{\|v\|^2} \leq \|u\|^2 \Leftrightarrow \|\langle u, v\rangle\|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$$

e extraindo a raiz quadrada (não negativa) obtemos:

$$\|\langle u, v\rangle\| \leq \|u\|\|v\|.$$

e a igualdade ocorre se, e somente se $u - \lambda v = 0$, isto é, $u = \lambda v$, o que significa que, u e v são linearmente dependentes. □

Definição 2. (**Espaço de Banach**). Seja E um espaço normado. Diz-se que E é um espaço de Banach se ele é completo, ou seja, se toda sequência de Cauchy em E é convergente em E.

Definição 3. (**Espaço de Hilbert**). Seja H um espaço vetorial munido do produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diz-se que H é um espaço de Hilbert se, é completo em relação a norma definida por $\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$.

Espaços de Lebesgue

Os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$ desempenham papel fundamental na análise funcional moderna e no estudo das equações diferenciais parciais, especialmente na formulação de soluções fracas.

Definição 4 (**Integral de uma função simples**). Seja $\phi \in M^+$ uma função simples com representação padrão dada por

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi E_i.$$

Então, a integral de φ com respeito a medida μ é definida como

$$\int \varphi d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(E_i).$$

Teorema 1 (Teorema da Representação de Riesz). Seja $1 < p < \infty$ e seja $\varphi \in (L^p)^*$ um funcional linear contínuo sobre $L^{p'}$. Então existe uma única função $u \in L^{p'}$ (com $p' = \frac{p}{p-1}$, donde

$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$) satisfazendo

$$\langle \varphi, f \rangle = \int uf \, , \forall f \in L^p.$$

Além disso, vale a identidade de normas:

$$\|\varphi\|_{(L^p)^*} = \|u\|_{p'}.$$

Definição 5 (Espaço $L^p(\Omega)$). Seja $1 \leq p < \infty$ e $\Omega \subset R$ um conjunto mensurável de medida finita. Definimos $L^p(\Omega)$ como o espaço das funções reais p-integráveis no sentido Lebesgue, ou seja,

$$\boldsymbol{L^p}(\Omega) = \left\{\boldsymbol{f} : \Omega \to \boldsymbol{R}\ \boldsymbol{mensur\acute{a}veis},\ \int_\Omega |\boldsymbol{f}|^{\boldsymbol{p}}\, \boldsymbol{d}\mu < \infty\right\}.$$

Definição 6 (Norma L^p). Seja (Ω, ξ, μ) um espaço de medida e $p \in [1, +\infty]$. Para uma função mensurável $f : \Omega \to R$ (ou C), definimos

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \text{ se } 1 \leq p \leq \infty,$$

e

$$\|f\|_{L^\infty} = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| \text{ se } p = \infty.$$

O conjunto $\boldsymbol{L^p}(\Omega, \xi, \mu)$ é o espaço das funções mensuráveis para as quais

$$\|f\|_{L^p} < \infty.$$

Definição 7 (Expoente conjugado). Dado $0 \leq p \leq \infty$ indica-se por q o elemento de $[0, \infty]$ tal que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

com a convenção de que, se $p = 1$, então $q = 1$ (e reciprocamente). Diz-se que q é **conjugado** de p.

Teorema 2 (Desigualdade de Young). Sejam $p > 1$ e $q > 1$ expoentes conjugados, isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Então, para quaisquer números reais $a \geq 0$ e $b \geq 0$, vale a desigualdade

$$a.b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, $a^p = b^q$.

Demonstração.

A prova baseia-se nas propriedades da função exponencial.

Se $a = 0$ ou $b = 0$, então $a.b = 0$.

Sejam $a, b > 0$, então

$$a.b = e^{ln(a.b)} = e^{lna+lnb} = e^{\frac{1}{p}lna^p + \frac{1}{q}lnb^q}$$

Como $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, tem-se que

$$a.b = e^{\frac{1}{p}lna^p + \frac{1}{q}lnb^q} \leq \frac{1}{p}e^{lna^p} + \frac{1}{q}e^{lnb^q} = \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$$

Portanto, $a.b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$. □

Teorema 3 (Desigualdade de Hölder). Sejam $p, q \in [1, \infty]$ expoentes conjugados, isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Se $f \in L^p(\Omega)$ e $g \in L^q(\Omega)$, então o produto $fg \in L^1(\Omega)$, e vale a desigualdade

$$\int_\Omega |fg|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Equivalentemente

$$\|f.g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

Demonstração.

A prova divide-se em dois casos:

O caso 1: $p = 1$ e $q = \infty$

Neste caso:

$f \in L^1(\Omega)$ e $g \in L^\infty(\Omega)$.

Pela definição da norma essencial supremo:

$$|g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Multiplicando por $|f(x)| \geq 0$:

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)|\|g\|_{L^\infty(\Omega)}$$

Integrando ambos os lados em Ω:

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \int_\Omega |f(x)|\|g\|_{L^\infty(\Omega)}dx.$$

Como $\|g\|_{L^\infty(\Omega)}$ é constante

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|dx \leq \|g\|_{L^\infty(\Omega)} \int_\Omega |f(x)|dx.$$

Pela definição da normal:

$$\int_\Omega |f(x)|dx = \|f\|_{L^1(\Omega)}.$$

Logo,

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^1(\Omega)} \|g\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Portanto, Hölder está provada,

Caso 2. $1 < p < \infty$

Suponhamos:

$$1 < p < \infty, \ \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Além disso, assumimos inicialmente que

$\|f\|_{L^p(\Omega)} \neq 0$ e $\|g\|_{L^q(\Omega)} \neq 0$

Definimos:

$$A(x) = \frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}, \ B(x) = \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}.$$

Como $A(x) \geq 0$ e $B(x) \geq 0$ podemos aplicar a desigualdade de Young:

$$A(x).B(x) \leq \frac{\left(A(x)\right)^p}{p} + \frac{\left(B(x)\right)^q}{q}$$

Substituindo A e B:

$$\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}} \cdot \frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|f(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g(x)|}{\|g\|_{L^q(\Omega)}}\right)^q$$

$$\frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}} \leq \frac{1}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}}|f(x)|^p + \frac{1}{q\|g\|^q_{L^q(\Omega)}}|g(x)|^q$$

Integrando ambos os lados em Ω:

$$\int_{\Omega} \frac{|f(x)g(x)|}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}} dx \leq \int_{\Omega} \left(\frac{1}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}}|f(x)|^p + \frac{1}{q\|g\|^q_{L^q(\Omega)}}|g(x)|^q\right) dx$$

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}} \int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \frac{1}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} \int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx + \frac{1}{q\|g\|^q_{L^q(\Omega)}} \int_{\Omega} |g(x)|^q \, dx.$$

Pela definição das normas L^p e L^q:

$\int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx = \|f\|^p_{L^p(\Omega)}$ e $\int_{\Omega} |g(x)|^q \, dx = \|g\|^q_{L^q(\Omega)}$.

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}} \int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \frac{1}{p\|f\|^p_{L^p(\Omega)}} \|f\|^p_{L^p(\Omega)} + \frac{1}{q\|g\|^q_{L^q(\Omega)}} \|g\|^q_{L^q(\Omega)}$$

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}} \int_{\Omega} |f(x)g(x)|dx \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$$

Como p e q são conjugados:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

Portanto,

$$\frac{1}{\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}}\int\limits_{\Omega}|f(x)g(x)|dx \leq 1$$

Multiplicando ambos os lados por $\|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}$, obtemos:

$$\int_{\Omega}|f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)} \qquad \square$$

Teorema 4 (**Desigualdade de Minkowski**). Seja $p \in [1, +\infty]$ e sejam $f, g \in L^p(X, \xi, \mu)$. Então:

a) $f + g \in L^p(X, \xi, \mu)$;

b) Vale a desigualdade triangular

$$\|f+g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Demonstração

A demonstração divide-se em três casos.

Caso 1: $p = 1$.

Sejam $f, g \in L^1(X,\ \xi, \mu)$.

Pela desigualdade triangular para os números reais:

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|.$$

Integrando:

$$\int\limits_X |f+g|\, d\mu \leq \int\limits_X (|f|+|g|)\, d\mu.$$

$$\int\limits_X |f+g|\, d\mu \leq \int\limits_X |f|\, d\mu + \int\limits_X |g|\, d\mu,$$

Pela definição da norma L^1:

$$\|f+g\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} + \|g\|_{L^1}.$$

Logo a desigualdade vale para $p = 1$.

Caso 2: $p = \infty$.

Sejam $f, g \in L^\infty(X, \varepsilon, \mu)$.

Pela definição da norma essencial supremo,

$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}$, e $|g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty}$ q.t.p.

Por definição os conjuntos:

$S_f = \{x \in X : |f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty}\}$ e $S_g = \{x \in X : |g(x)| \leq \|g\|_{L^\infty}\}$.

v7.n6.2026

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

Então, $\mu(S_f^c) = 0$ e $\mu(S_g^c) = 0$.

seja

$S = S_f \cap S_g$.

Então,

$$\mu(S^c) = \mu(S_f^c \cup S_g^c) \leq \mu(S_f^c) + \mu(S_g^c) = 0 + 0 = 0.$$

Para todo $x \in S$,

$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}$

Tomando supremo essencial:

$$\|f + g\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty} + \|g\|_{L^\infty}.$$

Portanto, a desigualdade vale para $p = \infty$.

Caso 3: $1 < p < \infty$.

Suponhamos agora:

$$1 < p < \infty.$$

Sem perda de generalidade, assumimos $\|f + g\|_{L^p} > 0$, pois caso contrário, $\|f + g\|_{L^p} = 0$ e a desigualdade é trivial.

Pela definição da norma L^p,

$$\|f + g\|_{L^p}^p = \int_X |f + g|^p \, d\mu.$$

Escrevemos:

$$|f + g|^p = |f + g||f + g|^{p-1}.$$

Assim,

$$\int_X |f + g|^p \, d\mu = \int_X |f + g||f + g|^{p-1} \, d\mu.$$

Desigualdade Triangular,

$|f + g| \leq |f| + |g|$, obtemos:

$$\int_X |f + g|^p \, d\mu \leq \int_X (|f| + |g|)|f + g|^{p\ -1} \, d\mu.$$

$$\int_X |f + g|^p \, d\mu \leq \int_X |f||f + g|^{p-1} \, d\mu + \int_X |g||f + g|^{p-1} \, d\mu. \quad (1)$$

Da Desigualdade de Hölder, segue que,

$$\int_X |f||f + g|^{p-1} \, d\mu \leq \left(\int_X |f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_X |f + g|^{(p-1)q} \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Da equação $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, tem-se que:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1 \Longrightarrow \frac{1}{q}=1-\frac{1}{p} \Longrightarrow p=(p-1)q$$

$$\int_X |f||f+g|^{p-1}\,d\mu \leq \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}. \qquad (2)$$

$$\int_X |f||f+g|^{p-1}\,d\mu \leq \|f\|_{L^p}\left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

Analogamente,

$$\int_X |g||f+g|^{p-1}\,d\mu \leq \left(\int_X |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

$$\int_X |g||f+g|^{p-1}\,d\mu \leq \|g\|_{L^p}\left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}.$$

$$\int_X |g||f+g|^{p-1}\,d\mu = \left(\int_X |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}. \qquad (3)$$

Consequentemente, por 1, 2 e 3, obtemos:

$$\int_X |f+g|^p\,d\mu = \int_X |f||f+g|^{p-1}\,d\mu + \int_X |g||f+g|^{p-1}\,d\mu$$

$$= \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\int_X |f+g|^p\,d\mu \leq \left[\left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}} \qquad (4)$$

Dividindo (4) por $\left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}$ e supondo que é diferente de zero:

$$\frac{\int_X |f+g|^p\,d\mu}{\left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}} \leq \frac{\left[\left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right]\left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}}{\left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1-\frac{1}{p}}}$$

$$\left(\int_X |f+g|^p\,d\mu\right)^{1-\left(1-\frac{1}{p}\right)} \leq \left(\int_X |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\left(\int_X |f+g|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_X |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_X |g|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

$$\left(\int_X |f+g|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}$$

Pela definição da norma L^p:

$$\|f+g\|_{L^p} \le \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}. \qquad \square$$

Espaço de Sobolev

Os espaços de Sobolev constituem uma extensão natural dos espaços de Lebesgue e desempenham papel central na análise moderna das equações diferenciais parciais.

Definição 8 (Derivada fraca). Dado um aberto $\Omega \subset R^n$, uma função $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e um multi-índice α, diz-se que $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ é uma $\alpha -$ésima **derivada fraca** de u se

$$\int_\Omega uD^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega v\varphi dx, \ \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Definição 9 (Espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$). O espaço de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ é definido como o conjunto de todas as funções u em $L^p(\Omega)$ cujas derivadas de ordem k pertence a $L^p(\Omega)$.

$$W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) | D^\alpha u \in L^p(\Omega), \forall \alpha \ \in N^n, |\alpha| \le k\}$$

Definição 10 (Norma de Sobolev): Seja $U \subset R^n$ um aberto, $k \in N$ e $1 \le p \le \infty$. Para uma função $u: \Omega \to R$, a **norma de Sobolev** é definida como:

- Para $1 \le p < \infty$:

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{\frac{1}{p}}.$$

- Para $p = \infty$

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \le k} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}.$$

Onde:

- α é um multi-índice que indica a ordem da derivada fraca.
- $D^\alpha u$ é a derivada fraca correspondente.
- $\|.\|_{L^p}$ é a norma usual em L^p.

Teorema 5 (Desigualdade de Poincaré). Seja $\boldsymbol{\Omega} \subset \boldsymbol{R^n}$ um domínio aberto, limitado e conexo. Para $\mathbf{1} \le \boldsymbol{p} < \infty$, existe uma constante $\boldsymbol{C_P} > \mathbf{0}$, dependendo apenas de $\boldsymbol{\Omega}$, $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{p}$, tal que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \le C_P \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \ \forall\, u \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{1}$$

onde:

$\|u\|_{L^p(\Omega)}$: Mede a magnitude da função;

$\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$: Mede a magnitude do gradiente;

C_P: Constante de Poincaré dependente do domínio Ω.

Demonstração

A prova utiliza:

1. Teorema Fundamental do Cálculo;
2. Desigualdade de Hölder;
3. Integração de Fubini;
4. Densidade de $C_c^\infty(\Omega)$ em $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Passo 1. Como Ω é limitado, existe um intervalo finito contendo a sua projeção sobre o eixo x_n.

Assim, existem constantes:

$$a < b$$

tais que:

$$\Omega \subset \{x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n : a < x_n < b\}.$$

Definimos:

$$L := b - a.$$

Escrevemos o ponto $x \in R^n$ como

$$x = (x', x_n),$$

onde:

$x' = (x_1, \dots, x_{n-1}) \in R^{n-1}$.

Afixemos x' e variemos x_n.

Passo 2. Tomemos:

$$u \in C_c^\infty(\Omega).$$

Como u tem suporte compacto em Ω, podemos defini-la por zero fora de Ω.

Em particular:

$$u(x', a) = 0.$$

Passo 3. Afixado x', definimos $\varphi(t) := u(x', t)$.

Como $u \in C^\infty$, segue que:

$$\varphi \in C^1([a, b]) .$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo:

$$\varphi(x_n) - \varphi(a) = \int_a^{x_n} \varphi'(t)\, dt.$$

Mas,

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

$$\varphi(a) = u(x', t) = 0.$$

além disso,

$$\varphi'(t) = \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t).$$

Logo,

$$u(x', x_n) = \int_a^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\, dt.$$

Tomando modulo em ambos os lados, temos:

$$|u(x', x_n)| = \left| \int_a^{x_n} \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t)\, dt \right|.$$

Pela desigualdade triangular:

$$|u(x', x_n)| \leq \int_a^{x_n} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) \right| dt.$$

Como:

$$[a, x_n] \subset [a, b],$$

Segue que:

$$|u(x', x_n)| \leq \int_a^{b} \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) \right| dt.$$

Da equação $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ resulta:

$$q = \frac{p}{p - 1}.$$

Escrevemos:

$$\int_a^b |f(t)|\, dt = \int_a^b |f(t)|\,.\,1dt.$$

Pela desigualdade de Hölder:

$$\int_a^b |f(t)|\, dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} . \left(\int_a^b 1^q\, dt \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Agora:

$$\int_a^b 1^q\, dt = b - a = L.$$

Logo,

$$\left(\int_a^b 1^q\,dt\right)^{\frac{1}{q}} = L^{\frac{1}{q}}.$$

Como

$$\frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p},$$

temos:

$$L^{\frac{1}{q}} = L^{1-\frac{1}{p}}.$$

Portanto:

$$\int_a^b |f(t)|\,dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} . L^{1-\frac{1}{p}}$$

$$\int_a^b |f(t)|\,dt \leq L^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |f(t)|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Tomando:

$$f(t) = \frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t),$$

obtemos:

$$|u(x',x_n)| \leq L^{1-\frac{1}{p}}\left(\int_a^b \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t)\right|^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Elevando ambos os lados à potência p:

$$|u(x',x_n)|^p \leq L^{p-1}\int_a^b \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t)\right|^p dt.$$

Integramos em $x_n \in (a,b)$:

$$\int_a^b |u(x',x_n)|^p\,dx_n \leq \int_a^b L^{p-1}\left(\int_a^b \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t)\right|^p dt\right)dx_n.$$

Como a integral não depende de x_n:

$$\int_a^b |u(x',x_n)|^p\,dx_n \leq L^{p-1}\left(\int_a^b \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}(x',t)\right|^p dt\right)\int_a^b dx_n.$$

Mas:

$$\int_a^b dx_n = L.$$

$$\int_a^b |u(x', x_n)|^p \, dx_n \leq L^{p-1} \left(\int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) \right|^p dt \right) L$$

Logo:

$$\int_a^b |u(x', x_n)|^p \, dx_n \leq L^p \int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) \right|^p dt.$$

Agora integrando em $x' \in R^{n-1}$:

$$\int_{R^{n-1}} \int_a^b |u(x', x_n)|^p \, dx_n dx' \leq L^p \int_{R^{n-1}} \int_a^b \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x', t) \right|^p dt dx.$$

Pelo Teorema de Fubini:

$$\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \leq L^p \int_\Omega \left| \frac{\partial u}{\partial x_n}(x) \right|^p dx.$$

Aplicando a definição da norma L^p :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_\Omega |u|^p dx.$$

Assim,

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p \leq L^p \left\| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Tomando raiz p-ésima:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq L \left\| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\|_{L^p(\Omega)}.$$

Sabemos que:

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right| \leq |\nabla u|,$$

$$\left| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right|^p \leq |\nabla u|^p.$$

Logo, Integrando, temos:

$$\left\| \frac{\partial u}{\partial x_n} \right\|_{L^p} \leq \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Portanto:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq L \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in C_c^\infty(\Omega).$$

Agora tomemos:

$$u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Como $C_c^\infty(\Omega)$ é denso em $W_0^{1,p}(\Omega)$, existe uma sequência:

$$u_k \in C_c^\infty(\Omega)$$

tal que:

$$u_k \to u \text{ em } W_0^{1,p}(\Omega).$$

Isto significa:

$$\|u_k - u\|_{L^p(\Omega)} \to 0,$$

e

$$\|\nabla u_k - \nabla u\|_{L^p(\Omega)} \to 0.$$

Para cada k:

$$\|u_k\|_{L^p(\Omega)} \leq L\|\nabla u_k\|_{L^p(\Omega)}.$$

Passando ao limite quando $k \to \infty$:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq L\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Portanto, existe uma constante $C_P = L = b - a$,

tal que:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_P\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega). \qquad \square$$

Esta desigualdade é essencial para garantir a coercividade das formas bilineares associadas a operadores elípticos.

Solução Fraca

Para equações elípticas, consideramos o problema de valor de contorno:

$$\begin{cases} Lu = f \text{ em } \Omega, \\ u = 0 \text{ sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

Onde:

$U \subset R^n$ é um subconjunto aberto e limitado;

$u: U \to R$ é a função incógnita;

$f: U \to R$ é uma função dada;

L é um operador diferencial parcial linear de segunda ordem.

O operador L pode ser escrito na forma:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u, \tag{2}$$

ou, equivalentemente na expressão:

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i(x)u_{x_i} + c(x)u. \tag{3}$$

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

com os coeficientes a^{ij}, b^{i},c (para $i,j = 1,\ldots,n$) funções dadas.

onde:

$\left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j}$: é o termo dominante de segunda ordem e representa o fenômeno de difusão.

$b^{i}(x)u_{x_i}$: Representa o termo transporte ou convecção.

$c(x)u$: Representa o termo de reação ou absorção.

Consideremos

$a^{ij}(x) = \delta_{ij},\ b^{i}(x) = 0,\ c(x) = 0$ e $f = 0$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ \ se \ \ i = j, \\ 0 \ \ \text{se}\ i \neq j, \end{cases}$$

onde δ_{ij} é o delta de Kronecker.

Substituindo esses coeficientes em (2):

$$Lu = -\sum_{i,j=1}^{n}\left(a^{ij}(x)u_{x_i}\right)_{x_j}.$$

Como $\delta_{ij} = 1$, para $i \neq j$, apenas os termos com $i = j$, permanecem:

$$Lu = -\sum_{j=1}^{n}\left(u_{x_i}\right)_{x_j}.$$

Agora derivando:

$$\left(u_{x_j}\right)_{x_j} = u_{x_j x_j}.$$

Logo:

$$Lu = -\sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}.$$

Pela definição do operador Laplaciano,

$$\Delta u = \sum_{j=1}^{n} u_{x_j x_j}.$$

Portanto,

$$Lu = -\,\Delta u.$$

Como $Lu = 0$, obtemos:

$$0 = -\,\Delta u$$

$$\Delta u = 0 \qquad (4)$$

A equação (4) é denominada Equação de Laplace.

Se $Lu = f$, então

$$-\Delta u = f$$

$$\Delta u = -f \tag{5}$$

A equação (4) é conhecida Equação de Poisson,

Definimos matriz dos coeficientes principais por

$$A(x) \coloneqq \left(a^{ij}(x)\right)_{i,j=1}^{n}. \tag{6}$$

Geralmente assume-se que $A(x)$ é simétrica:

$$a^{ij}(x) = a^{ji}(x).$$

Dedução da formulação fraca

Partimos do problema

$$Lu = f \text{ em } \Omega.$$

Na forma divergente

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij} u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} + cu = f$$

Tomando a função teste

$$\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega).$$

Multiplicando a equação por φ e integrando em Ω:

$$\left[-\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij} u_{x_i}\right)_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} + cu\right] \varphi = f\varphi.$$

Integrando

$$\int_{\Omega} \left[-\sum_{i,j=1}^{n} \left(a^{ij} u_{x_i}\right)_{x_j} \varphi + \sum_{i=1}^{n} b^i u_{x_i} \varphi + cu\varphi\right] dx = \int_{\Omega} f\varphi dx.$$

Aplicando integração por partes ao termo de segunda ordem:

$$-\int_{\Omega} \left(a^{ij} u_{x_i}\right)_{x_j} \varphi dx.$$

Pela fórmula de Green,

$$-\int_{\Omega} \left(a^{ij} u_{x_i}\right)_{x_j} \varphi dx = \int_{\Omega} a^{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} dx - \int_{\Omega} a^{ij} u_{x_i} \varphi n_j dS.$$

Como

$$\varphi = 0 \text{ sobre } \partial\Omega,$$

O termo fronteira desaparece.

$$\int_{\Omega} a^{ij} u_{x_i} \varphi n_j dS = 0$$

Logo

$$-\int_{\Omega} \left(a^{ij} u_{x_i}\right)_{x_j} \varphi dx = \int_{\Omega} a^{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} dx$$

Ao substituir na integral original, obtém-se

$$\int_{\Omega} \left(a^{ij} u_{x_i} \varphi_{x_j} + b^i u_{x_i} \varphi + cu\varphi\right) dx = \int_{\Omega} f\varphi dx.$$

Definição 11 (**Solução fraca**). Diz-se que $u \in W_g^{1,2}(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (1) se

$$\int_{\Omega} \left(a^{ij}(x) u_{x_i} \varphi_{x_j} + b^i(x) \varphi u_{x_i} + c(x) u\varphi\right) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi dx, \tag{12}$$

para toda função teste $\varphi \in W_0^{1,2}(\Omega)$.

Teorema 6 (Lax-Milgram). Seja V um espaço de Hilbert real, $a: V \times V \to R$ uma forma bilinear contínua e coerciva, e $L \in V'$ um funcional linear contínuo. Então existe um único $u \in V$ tal que:

$$a(u, v) = L(v) \ \forall v \in V.$$

Além disso, a solução satisfaz a estimativa de estabilidade:

$$\|u\|_V \le \frac{1}{\alpha} \|l\|_{V'},$$

onde $(\alpha > 0)$, constante de coercividade.

Demonstração

A prova baseia-se em três ideias principais da Análise Funcional:

a) Construção de um operador linear associado à forma bilinear;
b) Uso do Teorema de Representação de Riesz;
c) Análise da invertibilidade do operador.

1. Construção do operador linear

Definimos o operador

$$A: V \to V'$$

tal que para cada $u \in V$,

$$(Au)(v) = a(u, v), \forall v \in V.$$

Assim, Au é um funcional linear em V.

2. Linearidade

Sejam $u_1, u_2 \in V$ e $\lambda \in R$. Então

$$A(u_1 + \lambda u_2)(v) = a(u_1 + \lambda u_2, v).$$

Pela bilinearidade de a:

$$a(u_1 + \lambda u_2, v) = a(u_1, v) + \lambda a(u_2, v).$$

Logo:

$$A(u_1 + \lambda u_2) = Au_1 + \lambda Au_2,$$

Portanto A é linear.

3. Continuidade do operador

Como a é contínua, existe $c > 0$ tal que:

$$|a(u, v)| \leq C\|u\|_V \|v\|_V.$$

Logo

$$|(Au)(v)| \leq C\|u\|_V \|v\|_V.$$

Tomando supremo para $\|v\|_V = 1$:

$$\|Au\|_{V'} \leq C\|u\|_{V'}.$$

$$\|A\|_{V'} \|u\|_{V'} \leq C\|u\|_{V'}$$

$$\|A\|_{V'} \leq C.$$

Portanto, A é contínuo**.**

4. Coercividade do operador

Pela hipótese de coercividade:

$$a(u, u) \geq \alpha\|u\|_V^2, \alpha > 0.$$

Como

$$a(u, u) = (Au)(u), \text{ temos:}$$

$$(Au)(u) \geq \alpha\|u\|_V^2.$$

Pela Desigualdade de Cauchy- Schwarz no par dual:

$$(Au)(u) \leq \|Au\|_{V'} \|u\|_V.$$

Logo:

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq \|Au\|_{V'} \|u\|_V.$$

Se $u \neq 0$:

$$\|Au\|_{V'} \geq \alpha\|u\|_V.$$

Esta desigualdade mostra que A é injetivo e tem imagem fechada**.**

5. **Aplicação do Teorema de Riesz**

Como V é um espaço de Hilbert, pelo Teorema de Representação de Riesz, todo funcional $L \in V'$ pode ser representado por um elemento de V.

Ou seja, existe um único $f \in V$ tal que:

$$L(v) = (f, v), \forall v \in V.$$

O problema $a(u, v) = L(v)$ equivale a:

$$Au = L.$$

6. **Sobrejetividade de A**

Sabemos que A é linear, contínuo e coercivo.

Da estimativa

$$\|Au\|_{V'} \geq \alpha\|u\|_V,$$

Segue que:

i) A é **injetivo**

ii) a imagem A é **fechada.**

Vamos provar que

$$Im(A) = V'.$$

Suponha que exista $g \in V'$ ortogonal à imagem de A, isto é:

$$g(Au) = 0, \forall u \in V.$$

Pelo Teorema da Representação de Riesz, existe $w \in V$ tal que:

$$g(v) = (w, v)_V.$$

.

Então

$$0 = g(Au) = (w, Au).$$

Escolhendo $u = w$:

$$(w, Aw) = 0.$$

Mas

$$(w, Aw) = a(w, w)$$

Pela coercividade:

$$a(w, w) \geq \alpha\|w\|_V^2.$$

Logo:

$$\alpha\|w\|_V^2 \leq 0 \Longrightarrow w = 0.$$

Consequentemente, $g = 0$ pelo que o ortogonal da imagem de A é trivial. Portanto

$$Im(A) = V'.$$

isto é, A é sobrejetivo.

7. **Existência da solução**

Como $A: V \to V'$ é bijetivo, para todo $L \in V'$ existe um $u \in V$ tal que:

$$Au = L \Leftrightarrow a(u, v) = L(v), \forall v \in V.$$

8. **Unicidade**

Se u_1, u_2 são soluções, então:

$$a(u_1, v) = L(v),\ a(u_2, v) = L(v)$$

Subtraindo ambos os lados:

$$a(u_1, v) - a(u_2, v) = L(v) - L(v)$$
$$a(u_1 - u_2, v) = 0, \forall v \in V.$$

Ao escolher $v = u_1 - u_2$, temos:

$$a(u_1 - u_2, u_1 - u_2) = 0.$$

Pela coercividade:

$$\alpha\|u_1 - u_2\|^2 \leq 0$$
$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq 0$$
$$u_1 - u_2 = 0 \Longrightarrow u_1 = u_2.$$

Portanto, a solução é única.

9. **Estimativa da estabilidade**

Da equação variacional:

$$a(u, v) = L(v).$$

Fazendo $v = u$, segue que:

$$a(u, u) = L(u).$$

Pela coercividade:

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq L(u).$$

Pela definição da norma dual:

$$|L(u)| \leq \|L\|_{V'}\|u\|_V.$$

Logo:

$$\alpha\|u\|_V^2 \leq \|L\|_{V'}\|u\|_V.$$

Se $u \neq 0$:

$$\alpha\|u\|_V\|u\|_V \leq \|L\|_{V'}\|u\|_V$$
$$\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|L\|_{V'},\ \alpha > 0 \qquad \square$$

Aplicação do Teorema de Lax-Milgram ao problema de Poisson

Seja $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{L}^2(\boldsymbol{\Omega}),\ \boldsymbol{\Omega} \subset \boldsymbol{R}^n$ aberto e limitado. Considere o problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, em\ \Omega \\ u = 0,\ sobre\ \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

o qual admite solução $u = H_0^1(\Omega)$.

No Teorema de Lax-Milgram, vamos tomar $H = H_0^1(\Omega)$, sendo $H_0^1(\Omega)$ um espaço de Hilbert com produto interno dado por

$$\langle u, v\rangle = \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v \, dx \qquad (1.1)$$

e a norma

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (1.2)$$

Além disso, temos que

$$B : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to R$$

$$(u, v) \mapsto B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v \, dx = \langle u, v\rangle_{L^1(\Omega)}$$

E ainda, considera-se que

$$\varphi : H_0^1(\Omega) \to R$$

$$v \mapsto \varphi(v) = \int_{\Omega} f(x) v \, dx.$$

Agora vamos verificar se B é contínua e coerciva.

Em seguida, mostraremos que B é contínua e coerciva.

- Continuidade

$$|B(u, v)| = \left| \int_{\Omega} \nabla u . \nabla v \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |\nabla u . \nabla v| \, dx$$

Pela Desigualdade de Cauchy–Schwarz, temos que

$$\int_{\Omega} |\nabla u . \nabla v| \, dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| \, dx$$

e, pela Desigualdade de Hölder, segue que

$$\int_{\Omega} |\nabla u| |\nabla v| \, dx \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

dessa forma, obtemos

$$|B(u, v)| = \|u\|_{H_0^1(\Omega)} \|v\|_{H_0^1(\Omega)}.$$

O que garante, a continuidade de B.

- Coercividade

Observemos que

$$B(u,u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \|u\|^2_{H_0^1(\Omega)}.$$

Em seguida, concluímos sua coercividade.”

Como φ é linear, vamos estudar sua continuidade. Note que

$$|\varphi(v)| = \left| \int_{\Omega} f.v \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |f.v| \, dx$$

Aplicando a Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\Omega} |f.v| \, dx \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}$$

Além disso, pela Desigualdade de Poincaré, existe uma constante $C > 0$, tal que

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram, existe uma única função $u \in H_0^1(\Omega)$ satisfazendo

$$B(u,u) = \varphi(v), \forall v \in H_0^1(\Omega),$$

ou seja

$$\int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx = \int_{\Omega} f(x) v dx, \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Logo, o problema (1) possui uma única solução fraca.

Seja $f \in L^2(\Omega)$ com $\Omega \subset R^n$ aberto. Considere o seguinte problema:

$$\begin{cases} -\Delta u + u = f, \ em \ \Omega \\ \ u = 0, \ sobre \ \partial\Omega, \end{cases} \qquad (2)$$

Inicialmente, realizaremos a formulação variacional do problema. Para isso, multiplicamos a equação

$$-\Delta u + u = f$$

por uma função teste $v \in C_0^\infty(\Omega)$ e, integrando em Ω, obtemos

$$\int_{\Omega} (-\nabla u) v dx + \int_{\Omega} u v dx = \int_{\Omega} f v dx. \quad (1.3)$$

Recorrendo à identidade de Green, temos:

Sejam $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}), v \in C^1(\overline{\Omega})$ e $\Omega \subset R^n$ um domínio limitado com fronteira suave.

Então,

$$\int_{\Omega} (-\nabla u)v\, dx = \int_{\Omega} \nabla u. \nabla v dx - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}. vdS,$$

onde η representa o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$.

Como $v \in C_0^\infty(\Omega)$, segue que $v = 0$ sobre $\partial\Omega$.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \eta}. vdS = 0,$$

Portanto, obtemos a igualdade

$$\int_{\Omega} (-\nabla u)vdx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx.$$

Sendo assim, em (1.3), obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u. \nabla v\, dx + \int_{\Omega} uvdx = \int_{\Omega} fvdx.$$

Usando a linearidade da integral, segue que

$$\int_{\Omega} (\nabla u. \nabla v + uv)dx = \int_{\Omega} fvdx.$$

Diante disto, definimos

$$B(u,v) = \int_{\Omega} (\nabla u. \nabla v + uv)dx = \langle u, v\rangle. \qquad (1.4)$$

Agora, utilizaremos argumentos semelhantes aos empregados no problema (1). Pela Desigualdade de Cauchy–Schwarz, segue que

$$B(u,v) \leq \|u\|_1 \|v\|_1.$$

Logo, verifica-se a continuidade de B.

em (1.4), fazendo $u = v$, obtemos

$$|B(u,v)| \geq \|u\|_1^2.$$

Portanto, B é coerciva. Além disso, definimos o funcional linear

$$\varphi: H_0^1(\Omega) \to R,$$

por

$$\varphi(v) = \int_{\Omega} fv\, dx.$$

Sendo assim, o funcional φ é linear e contínuo, conforme verificado no problema (1). Portanto, pelo Teorema de Lax-Milgram, conclui-se que o problema (2) admite uma única solução fraca $u \in H_0^1(\Omega)$.

MATERIAIS E MÉTODOS

O artigo foi desenvolvido por meio de pesquisa bibliográfica baseada em obras clássicas de Equações Diferenciais Parciais (EDPs) e Análise Funcional. A fundamentação teórica é sustentada em autores de referência, como Trudinger (2001), Evans (2010), Brezis (2011) e Pimentel (2022), cujas contribuições abordam a existência e a unicidade de soluções em espaços de Sobolev. Do mesmo modo, estudos de Rudin (1987), Ambrosio et al. (2011) e outros, oferecem suporte teórico relacionado aos espaços de Hilbert, Lebesgue e Sobolev.

A metodologia adotada consistiu em uma revisão bibliográfica de abordagem dedutiva, estruturada em três etapas interdependentes:

Fundamentação nos espaços de Hilbert e Sobolev: Foram analisados os espaços de Lebesgue $L^p(\Omega)$ e, em especial, o espaço de Hilbert $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$. Destacou-se o conceito de derivada fraca e enunciaram-se os Teoremas da Desigualdade de Poincaré, Representação de Riesz, Young, Hölder, Minkowski, Cauchy-Schwarz e de Lax-Milgram.

1. **Desigualdade de Poincaré e formulação variacional**: Demonstrou-se essa desigualdade para domínios limitados, conexos e com fronteira C^1:

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

No espaço $H_0^1(\Omega)$ compostos por funções nulas na fronteira, a desigualdade torna a seminorma do gradiente equivalente à norma H^1. Esse resultado foi utilizado na transformação da forma forte da equação de Poisson

$$-\Delta u = f,$$

em sua formulação fraca acompanhada de ilustração numérica da metodologia.

2. **Aplicação do Teorema de Lax-Milgram e noção de problema bem-posto**: verificaram-se as hipóteses de continuidade e coercividade da forma bilinear

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

definida em $H_0^1(\Omega)$, sendo a coercividade garantida pela Desigualdade de Poincaré. O Teorema de Lax-Milgram assegurou a existência e a unicidade da solução fraca. Adicionalmente, demonstrou-se a dependência contínua da solução em relação ao dado f, caracterizando o problema como bem-posto no sentido de Hadamard. Por fim, apresentou-se um exemplo do problema de Poisson.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A pesquisa evidenciou que conceitos como norma e os espaços de Banach e Hilbert constituem fundamentos essenciais da Análise Funcional. Em particular, os espaços de Hilbert, Lebesgue e Sobolev permitem representar funções como elementos de espaços vetoriais de dimensão infinita, possibilitando o estudo de convergência, a formulação fraca de equações diferenciais parciais e a obtenção de soluções ótimas em problemas variacionais.

A aplicação da metodologia permitiu consolidar os seguintes resultados:

- **Rigor do Teorema de Lax-Milgram:** Apresentou-se uma exposição detalhada do teorema para formas bilineares contínuas e coercivas, destacando-se a Desigualdade de Poincaré como ferramenta essencial para garantir a coercividade em $H_0^1(\Omega)$. Demonstrou-se que o operador associado $A: V \to V'$ é um isomorfismo, assegurando a existência, a unicidade e a estabilidade da solução por meio de estimativa $\|u\|_V \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_{V'}$, em que α representa a constante de coercividade.
- **Validação da Formulação Fraca da Equação de Poisson:** Resolveu-se o problema de Dirichlet em $H_0^1(\Omega)$, tendo verificado integralmente as hipóteses de existência da solução. A análise da regularidade mostrou que, embora a solução fraca pertença inicialmente a $H^1(\Omega)$, condições adicionais sobre o domínio Ω, como convexidade, e sobre o dado f permitem recuperar a solução clássica em $H^2(\Omega) \cap C^2(\Omega)$.

Esse resultado confirma a consistência teórica entre as formulações forte e fraca do problema.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa evidenciou a relevância da abordagem variacional como instrumento fundamental na análise de equações diferenciais parciais elípticas. Por meio do Teorema de Lax–Milgram, demonstrou-se que a existência, a unicidade e a estabilidade da solução da equação de Poisson, sob condições de contorno de Dirichlet, decorrem diretamente da estrutura geométrica dos espaços de Sobolev.

Nesse contexto, a coercividade destacou-se como elemento central da demonstração. A aplicação da Desigualdade de Poincaré em domínios limitados permitiu assegurar essa propriedade, transformando o problema diferencial em um problema variacional bem-posto. O exemplo resolvido contribuiu na consolidação dos resultados teóricos, evidenciando que a formulação fraca possibilita tratar situações de regularidade que nem sempre podem ser abordadas pela formulação clássica.

Desta forma, o trabalho alcançou o propósito de expor os fundamentos centrais da Análise Funcional aplicada às EDPs. Como perspectivas futuras, vislumbra-se a transição da linearidade para o estudo de operadores não lineares, que demanda a utilização de métodos mais avançados de compacidade e monotonicidade, além de análise de problemas de fronteira livre, área promissora para a aplicação de técnicas de regularidade e otimização em fenômenos físicos envolvendo interfaces móveis.

REFERÊNCIAS

AMBROSIO, Luigi; DA PRATO, Giuseppe; MENNUCCI, Andrea. **Introduction to measure theory and integration**. Pisa: Edizioni della Normale, 2011.

BEZERRA, Paulo Vinícius Dantas. **Uma introdução ao Teorema de Lax-Milgram.** 2025. Monografia (Graduação em Matemática) — Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Caicó, RN, jan. 2025.

BREZIS, Haim. **Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations**. New York: Springer, 2011.

CENTURION, Bruna Zampieri. **O teorema de Lax-Milgram**. Revista Eletrônica Paulista de Matemática, Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, v. 22, n. 1, jul. 2022. ISSN 2316-9664.

EVANS, Lawrence C. **Partial differential equations**. 2. ed. Providence: American Mathematical Society, 2010. (Graduate Studies in Mathematics, v. 19).

GILBARG, David; TRUDINGER, Neil S. **Elliptic partial differential equations of second order**. Berlin: Springer, 2001.

KREYSZIG, Erwin. **Introductory functional analysis with applications**. New York: John Wiley & Sons, 1978.

MARANGONI, Ana Laura Mendonça. **Teoremas clássicos de análise funcional**. 2021. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Matemática) — Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Uberlândia, MG, 2021.

PÉREZ, Miguel López. **El teorema de Lax-Milgram:** origen, generalizaciones y aplicaciones. 2017. Trabajo de Fin de Grado (Grado en Matemáticas) — Universidad de Granada, Facultad de Ciencias, Granada, jun. 2017.

PIMENTEL, Edgard Almeida. **Elliptic regularity theory by approximation methods.** Coimbra: University of Coimbra, 2022. ISBN 978-1-009-09666-9. DOI: 10.1017/9781009099899.
RUDIN, Walter. **Real and complex analysis**. 3. ed. New York: McGraw-Hill Book Company, 1987.

SILVA, João Felipe Fonseca da. **O teorema de Lax-Milgram e aplicações**. 2014. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) — Universidade Federal do Amapá, Macapá, 2014.

SILVA, Mauro Viegas da. **Os teoremas de índice de Poincaré.** 2011. Dissertação (Mestrado em Matemática) — Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2011.

SMIGLY, Douglas de Araujo. **Análise funcional**: MAT0334 / MAT5721. Notas de aula, 1º semestre de 2019. Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.