v7.n6.2026

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

O USO DO MAPLE COMO RECURSO DIDÁTICO NO ENSINO DE FUNÇÕES DE VARIÁVEL COMPLEXA

THE USE OF MAPLE AS A DIDACTIC RESOURCE IN THE TEACHING OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE

EL USO DE MAPLE COMO RECURSO DIDÁCTICO EN LA ENSEÑANZA DE FUNCIONES DE VARIABLE COMPLEJA

Kiese Kimbuta[1] e Marcos João Púcuta[2]

e768267
https://doi.org/10.47820/recima21.v7i6.8267

PUBLICADO: 06/2026

RESUMO

Este artigo avalia a utilização do *software* matemático Maple como recurso didático no ensino de Funções de Variável Complexa. O estudo foi realizado com estudantes do 2.º ano do curso de Licenciatura em Ensino da Matemática da Escola Superior de Ciências Sociais, Artes e Humanidades (ESCISAH), em Mbanza Kongo, província do Zaire. A pesquisa partiu da constatação de dificuldades na compreensão e visualização de conceitos abstratos da disciplina de Análise Complexa, refletidas em elevados índices de insucesso acadêmico, e procurou responder à seguinte questão: como o *software* Maple pode contribuir para o processo de ensino-aprendizagem de Funções de Variável Complexa? Para tal, adotou-se uma abordagem metodológica mista, envolvendo questionários, entrevistas semiestruturadas, pré-teste, pós-teste, análise documental do programa e do livro didático, bem como observação de aulas, aplicada a uma amostra de 65 alunos. Após o diagnóstico inicial, que revelou 94% de reprovações no pré-teste, foi implementada uma intervenção pedagógica intensiva de cinco dias, baseada na utilização do Maple para a exploração de conceitos, visualização gráfica e resolução de exercícios. Os resultados do pós-teste indicaram que 92% dos estudantes atingiram o nível de aptidão, evidenciando a eficácia do *software* na promoção da compreensão dos conteúdos e na melhoria do desempenho acadêmico. Assim, o Maple constitui uma ferramenta didática relevante para o ensino-aprendizagem de Funções de Variável Complexa.

PALAVRAS CHAVE: Funções de Variável Complexa. *Software* Maple. Recurso Didático.

ABSTRACT

This article evaluates the use of the mathematical software Maple as a didactic resource in the teaching of Functions of a Complex Variable. The study was conducted with second-year students of the Degree in Mathematics Teaching at the School of Social Sciences, Arts and Humanities (ESCISAH), in Mbanza Kongo, Zaire province. The research stemmed from the observation of difficulties in understanding and visualizing abstract concepts in the discipline of Complex Analysis, reflected in high rates of academic failure, and sought to answer the following question: how can the Maple software contribute to the teaching-learning process of Functions of a Complex Variable? To this end, a mixed methodological approach was adopted, involving questionnaires, semi-structured interviews, pretest, posttest, document analysis of the syllabus and textbook, as well as class observation, applied to a sample of 65 students. After the initial

[1] Mestre em Ensino da Matemática pelo Instituto Superior de Ciências de Educação de Cabinda da Universidade 11 de Novembro e Mestrando em Matemática e Aplicações pela Universidade Agostinho Neto. Docente universitário da Escola Superior Pedagógica do Bengo.
[2] Doutor em Ciências Pedagógicas, pela Universidade de Ciências Pedagógicas Enrique José Varona (UCPEJV), Cuba. Área de Especialização: Análise Matemática com Integração das Tecnologias de Informação e Comunicação. Docente do Instituto Superior de Ciências de Educação (ISCED-CABINDA) /Angola.

diagnosis, which revealed a 94% failure rate in the pretest, an intensive five-day pedagogical intervention was implemented, based on the use of Maple for concept exploration, graphical visualization, and problem-solving. The posttest results indicated that 92% of the students achieved the proficiency level, evidencing the software's effectiveness in promoting content comprehension and improving academic performance. Thus, Maple constitutes a relevant didactic tool for the teaching-learning of Functions of a Complex Variable.

KEYWORDS: *Functions of a Complex Variable. Maple Software. Didactic Resource.*

RESUMEN
Este artículo evalúa el uso del software matemático Maple como recurso didáctico en la enseñanza de Funciones de Variable Compleja. El estudio se realizó con estudiantes de segundo año de la Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Escuela Superior de Ciencias Sociales, Artes y Humanidades (ESCISAH), en Mbanza Kongo, provincia de Zaire. La investigación partió de la constatación de dificultades en la comprensión y visualización de conceptos abstractos de la disciplina de Análisis Complejo, reflejadas en elevados índices de fracaso académico, y buscó responder a la siguiente pregunta: ¿cómo puede el software Maple contribuir al proceso de enseñanza-aprendizaje de las Funciones de Variable Compleja? Para ello, se adoptó un enfoque metodológico mixto, que incluyó cuestionarios, entrevistas semiestructuradas, pretest, postest, análisis documental del programa y del libro de texto, así como observación de clases, aplicado a una muestra de 65 estudiantes. Tras el diagnóstico inicial, que reveló un 94% de reprobaciones en el pretest, se implementó una intervención pedagógica intensiva de cinco días, basada en el uso de Maple para la exploración de conceptos, visualización gráfica y resolución de ejercicios. Los resultados del postest indicaron que el 92% de los estudiantes alcanzaron el nivel de aptitud, evidenciando la eficacia del software en la promoción de la comprensión de los contenidos y en la mejora del rendimiento académico. Así, Maple constituye una herramienta didáctica relevante para la enseñanza-aprendizaje de las Funciones de Variable Compleja.

PALABRAS CLAVE: *Funciones de Variable Compleja. Software Maple. Recurso Didáctico.*

INTRODUÇÃO

A Análise Complexa constitui um ramo da matemática dedicado ao estudo das funções de variável complexa, com aplicações que se estendem da geometria algébrica e teoria dos números à hidrodinâmica, termodinâmica e, especialmente, à mecânica quântica. Sua aprendizagem exige do estudante uma atividade cognitiva complexa: apropriação de linguagem simbólica específica, compreensão conceitual, flexibilidade na aplicação de teorias e capacidade de transitar entre diferentes registros de representação – algébrico, geométrico e gráfico. Nesse âmbito, o ensino de funções de variável complexa para alunos do 2.º ano da licenciatura em Ensino da Matemática apresenta-se como um domínio cientificamente delimitado que concentra elevado grau de abstração e a necessidade de ressignificar conceitos previamente assimilados no plano real (limite, continuidade, derivada) quando transportados para o plano complexo. A dificuldade em visualizar o módulo, o argumento e as transformações conformes no plano complexo constitui um obstáculo recorrente, dificultando a compreensão de conceitos fundamentais, como as equações de Cauchy-Riemann, as funções analíticas e harmónicas, a holomorfia, a integração complexa, as séries, os polos e os resíduos.

Embora a literatura reconheça o potencial das Tecnologias de Informação e Comunicação para o ensino da matemática (Henz, 2009; Púcuta, 2016), persiste uma lacuna investigativa significativa: são escassos os estudos que avaliem empiricamente a integração de sistemas de álgebra computacional (CAS) no ensino da Análise Complexa em contextos institucionais periféricos, caracterizados por recursos tecnológicos limitados e formação docente deficitária. Mais concretamente, não se identificaram, até o momento, investigações que analisem o contributo do *software* Maple no ensino de funções de variável complexa junto a estudantes de licenciatura em Matemática em Angola, nem apresentam uma proposta de integração pedagógica adaptada à realidade da província do Zaire. Essa ausência de evidências empíricas direcionadas constitui a lacuna que o presente estudo procura colmatar, mediante a avaliação do impacto da utilização do *software* Maple na compreensão dos conceitos de Funções de Variável Complexa por estudantes universitários.

Diante desse cenário, formula-se a seguinte questão de pesquisa: Como o *software* Maple pode contribuir para o ensino-aprendizagem de Funções de Variável Complexa no 2.º ano da licenciatura em Matemática da Escola Superior de Ciências Sociais, Artes e Humanidades? A pertinência desta questão justifica-se por três fatores conjugados: (i) a reconhecida dificuldade dos alunos na apreensão de conceitos abstratos da Análise Complexa, agravada pela ausência de suportes visuais adequados; (ii) a carência de metodologias ativas e de ferramentas computacionais nas práticas docentes observadas na instituição-alvo; (iii) a necessidade de gerar evidências que possam subsidiar políticas de formação continuada e de integração tecnológica no ensino superior angolano. Como sustenta Needham (2000), muitos entraves no estudo das funções de variável complexa decorrem da negligência do potencial da tecnologia para a exploração visual e conceitual – lacuna que este estudo visa colmatar.

O estudo exploratório preliminar realizado nessa escola permitiu diagnosticar dificuldades específicas entre os estudantes do 2.º ano da licenciatura em Ensino da Matemática: problemas na compreensão de funções de variável complexa, limite, continuidade e derivada; obstáculos em operações algébricas e trigonométricas com números complexos (adição, subtração, multiplicação, divisão), interpretação geométrica, potência da unidade imaginária, fórmulas de De Moivre e de Euler; ausência do uso de *softwares* matemáticos e de metodologias ativas; escasso investimento dos docentes em atualização pedagógica; e falta de supervisão institucional. Essas fragilidades comprometem diretamente o avanço para conteúdos mais complexos dessa disciplina, tornando imperativa a busca por soluções didáticas apoiadas em tecnologia.

Para enfrentar esses desafios, optou-se pelo software *Maple* em detrimento de outras ferramentas como Matlab e GeoGebra. A escolha baseia-se em critérios objetivos alinhados ao contexto e aos objetivos da pesquisa. O Maple destaca-se pela sua superior capacidade de manipulação simbólica (CAS), tratando integrais, limites, derivadas e equações diferenciais de forma exata – enquanto o Matlab é essencialmente numérico e sua Symbolic Math Toolbox funciona como recurso secundário. Na visualização de funções de variável complexa, o Maple permite gráficos $3D$ de alta qualidade, animações de superfícies de Riemann, transformações conformes e plots de módulo e argumento; o Matlab é menos intuitivo para fins pedagógicos, e o GeoGebra, apesar de ser gratuito e amplamente difundido, apresenta limitações funcionais em níveis avançados de Análise Complexa. Além disso, o Maple oferece um ambiente didático integrado que combina texto, cálculos e gráficos dinâmicos no mesmo documento, facilitando a construção de materiais interativos – característica não encontrada com a mesma fluidez nos outros softwares.

Assim, o presente estudo tem como objetivo geral analisar de que maneira o Maple pode ser utilizado como recurso didático no ensino de funções de variável complexa, destacando sua aplicação prática junto aos estudantes do 2.º ano da licenciatura em Matemática. Como objetivos específicos, estabelecem-se: (i) avaliar o impacto do Maple na compreensão de funções de variável complexa; (ii) analisar o contributo do Maple na visualização de conceitos no plano complexo; (iii) identificar dificuldades de aprendizagem antes e após o uso da ferramenta; (iv) investigar a percepção dos estudantes sobre o uso do Maple no ensino da Análise Complexa.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta seção, abordou-se o ensino-aprendizagem de funções de variável complexa, a interpretação geométrica, limite, continuidade e derivada dessas funções, as dificuldades de aprendizagem desses conteúdos, a discussão sobre a visualização matemática digital, o Maple como recurso didático para o ensino de funções de variável complexa e sua comparação com outras plataformas (GeoGebra e Matlab), a formação docente para a integração pedagógica de sistemas de álgebra computacional (CAS), a aprendizagem baseada em problemas de Análise Complexa, o desenvolvimento da autonomia discente mediada por tecnologias e a avaliação ao longo prazo da retenção conceitual após intervenções tecnológicas.

O Ensino-aprendizagem das funções de variável complexa

O processo de ensino-aprendizagem das funções de variável complexa integra a disciplina de Análise Complexa, lecionada no 2º ano do curso de Matemática em Instituições de Ensino Superior, sobretudo nos Institutos Superiores de Ciências da Educação, Escolas Superiores Pedagógicas, Faculdades de Ciências e de Engenharias.

Autores clássicos e contemporâneos, como Ruel Churchill e James Brown (2009), amplamente reconhecidos internacionalmente, estruturam o ensino por meio de abordagens analíticas, algébricas e geométricas. O estudo dessas funções, presente em cursos de Matemática, Física e Engenharias, exige dos discentes uma atividade cognitiva complexa, que envolve: aquisição de linguagem e simbologia próprias; compreensão e aplicação flexível de conceitos; utilização de diferentes formas de representação; capacidade de estabelecer analogias e correspondências; aptidão para abstração, demonstração e generalização.

A disciplina de Análise Complexa, na Escola Superior de Ciências Sociais, Artes e Humanidades, é semestral e ministrada por docentes licenciados em Ensino da Matemática. A escassez de professores doutores, mestres e de bibliografia especializada tem dificultado a obtenção de resultados satisfatórios dos alunos. O principal manual utilizado é a Sebenta de Matemática – Números Complexos, do autor português Fernando Borja Santos, publicada no ano 2000, que aborda os seguintes capítulos: 1. Corpo dos Números Complexos; 2. Representação Geométrica - Plano de Argand; 3. Interpretação Geométrica; 4. Transformações Geométricas; 5. Equações; 6. Funções de Variável Complexa e 7. Cálculo de Resíduos em Polos de 1.ª ordem.

Além do manual principal, os docentes podem recorrer a obras complementares de autores como Fernandez e Bernardes (2008), Púcuta (2024), entre outros. Esses livros oferecem diferentes perspectivas e aprofundamentos sobre o ensino das funções de variável complexa, contribuindo para a consolidação de abordagens analíticas, algébricas e geométricas. A incorporação dessas referências na prática pedagógica não apenas amplia o repertório teórico dos professores, mas também enriquece a formação dos estudantes, permitindo-lhes acessar interpretações variadas e metodologias diversificadas.

O programa de Análise Complexa em uso nessa instituição, elaborado pelo Departamento de Ensino e Investigação Científica de Matemática do ISCED-Cabinda, está organizado em seis capítulos que contemplam conteúdos desde os números complexos e as funções de variável complexa até o estudo de polos e resíduos.

Nos últimos cinco anos, o programa passou por um processo de revisão e atualização, abrangendo o aperfeiçoamento dos conteúdos, dos objetivos gerais e específicos, dos critérios de avaliação, das atividades complementares, das orientações metodológicas e das referências bibliográficas.

A disciplina, lecionada no 2.º semestre do curso, restringe-se a subtemas relacionados aos números complexos, o que limita o conhecimento dos discentes sobre Funções de Variável Complexa e compromete o desenvolvimento de competências cognitivas no cálculo de limites, continuidade, derivadas e outros tópicos associados. Nessa vertente, Divinópolis (2019) sistematiza os conteúdos essenciais a abordar – definição e operações com números complexos, plano complexo, módulo e conjugado, representação polar, fórmulas de Moivre, raízes n-ésimas, função exponencial nos complexos, limites, continuidade, derivada, funções analíticas, equações de Cauchy-Riemann e funções harmónicas – e, para introduzir o conceito de função de variável complexa, convém retomar a definição de função no domínio real: uma correspondência unívoca que associa a cada elemento de um conjunto A (domínio) um único elemento de B (contradomínio), denotada por $f: A \to B$. No caso complexo, a relação preserva a unicidade: a cada número complexo z associa-se um único w, representado por $f(z) = w$.

O manual utilizado na Escola Superior de Ciências Sociais, Artes e Humanidades de Mbanza-Kongo (Zaire) traz a seguinte definição: Sejam $u = u(x, y)$ e $v = v(x, y)$ funções de x e y. Diz-se que $w = f(z)$ é uma função de variável complexa, se $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$.

Essa noção serve de base para o estudo de limites, continuidade, derivabilidade e demais conceitos. A decomposição da função em partes real e imaginária permite escrever $f(z) = u(x, y) + i\, v(x, y)$, onde u e v são funções reais de duas variáveis reais. Assim, f pode ser vista como uma aplicação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$: $f: (x, y) \mapsto \big(u(x, y), v(x, y)\big)$.

Como exemplo, temos:

Para a função $f(z) = 2z^3 - z + i$ vamos determinar as suas partes real $u(x, y)$ e imaginária $v(x, y)$.

$$f(z) = 2z^3 - z + i = 2(x + iy)^3 - (x + iy) + i$$
$$= 2(x^3 + 3x^2yi + 3xy^2 - y^3i) - x - iy + i$$
$$= 2x^3 + 6xy^2 - x + (6x^2y - 2.y^3 - y + 1)i$$

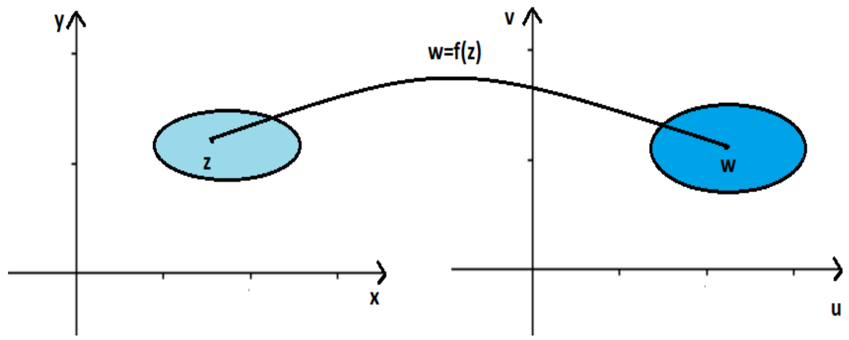
onde $u(x, y) = 2x^3 + 6xy^2 - x$ corresponde a parte real e
$v(x, y) = 6x^2y - 2.y^3 - y + 1$ a parte imaginária.

Interpretação Geométrica

A representação gráfica das funções de variável complexa, não pode ser realizada em um único sistema de coordenadas bidimensional. Isso ocorre porque tanto a variável independente z quanto a variável dependente w são números complexos, cada um exigindo sua própria representação em um plano.

Do ponto de vista geométrico, uma função complexa $w = f(z)$ pode ser interpretada como uma transformação entre planos. Seus gráficos corresponderiam a subconjuntos de $\mathbb{C}^2$, naturalmente identificados com $\mathbb{R}^4$ – quatro dimensões: duas para a variável z e duas para w. Para tornar essa relação mais acessível, a teoria utiliza dois planos distintos: o plano do domínio (variável $z = x + iy$) e o plano do contradomínio (variável $w = u + iv$). Assim, a função é vista como uma transformação que associa regiões ou curvas do plano xy às suas imagens no plano uv, conforme ilustra a figura 1.

Figura 1. Interpretação geométrica da funções de variável complexa



z: Plano pré-imagem w: Plano imagem

No plano $\boldsymbol{z}$, representam-se os pontos $\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$ pertencentes ao domínio. No plano $\boldsymbol{w}$ representam-se os pontos imagem $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$. Dessa forma, toda função de variável complexa estabelece uma correspondência entre os pontos dos dois planos, caracterizando-se como uma transformação geométrica que relaciona domínio e contradomínio.

Limite, continuidade e derivada de funções de variável complexa

Os limites complexos exigem raciocínio analítico, análise do comportamento das funções, interpretação geométrica e domínio das formas indeterminadas, pois envolvem a compreensão simultânea das componentes algébrica e geométrica das funções de variável complexa. O limite de uma função $f(z)$ descreve seu comportamento quando a variável z se aproxima de um ponto específico z_0. A ideia central é assegurar que, para $f(z)$ permanecer arbitrariamente próximo de um valor L, o ponto z deve estar suficientemente próximo de z_0 no plano complexo. Formalmente, a definição é análoga à das funções reais: Diz-se que w_0 é o limite de $f(z)$ quando z tende a z_0 se, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Se o limite existe, ele é único. Além disso, é importante distinguir entre o valor da função em z_0, denotado por $f(z_0)$, e o valor do limite nesse ponto.

Escrevendo $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, com $z = x + iy$ e $w_0 = u_0 + iv_0$, a condição necessária e suficiente para que $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$ é que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \text{ e } \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$

Assim,

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y) + i \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y) = u_0 + iv_0.$$

As propriedades operatórias dos limites complexos – unicidade, soma, subtração, produto, cociente (com denominador não nulo) e composição de funções – funcionam como regras práticas que simplificam os cálculos. No entanto, uma particularidade essencial dos limites no plano complexo é a dependência do caminho de aproximação: se o valor do limite variar conforme o percurso escolhido (por exemplo, ao longo do eixo real, do eixo imaginário ou de curvas), então o limite não existe, o que torna o estudo mais exigente e analítico do que no caso real. Tal como no cálculo real, podem surgir indeterminações dos tipos

$$\frac{0}{0}, \ \frac{\infty}{\infty}, \ \infty - \infty, \ 1^\infty, \ 0 \times \infty \ , \ \infty^0 \text{ e } 0^0.$$

Da teoria de limites de funções reais de duas variáveis, sabe-se que se $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x, y)$ assume valores diferentes quando se percorrem caminhos distintos de aproximação, então esse limite não existe – situação análoga ocorre com $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x, y)$.

A continuidade de funções de variável complexa é definida de forma análoga à das funções reais. Dizemos que $f(z)$ é contínua no ponto z_0 quando, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $|z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, escrevendo-se

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Isso significa que a função está definida em z_0 e seu valor nesse ponto coincide com o limite.

Pontos onde $f(z)$ deixa de ser contínua são denominados descontinuidades. Se o limite existe mas difere de $f(z_0)$, a descontinuidade é chamada **removível**, pois é possível redefinir $f(z)$ para torná-la contínua.

Para $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, a condição necessária e suficiente para a continuidade em $z_0 = (x_0, y_0)$ é que u e v sejam contínuas em (x_0, y_0). Das propriedades dos limites decorrem as da continuidade: a soma e o produto de funções contínuas são contínuos; o cociente é contínuo exceto onde o denominador se anula; e a composição de funções contínuas é contínua.

A definição de derivada para funções de variável complexa é formalmente idêntica à do caso real. Do mesmo modo, grande parte das fórmulas fundamentais de derivação da análise real é aplicada também às funções complexas, assim como a noção de diferencial conserva a mesma estrutura. No entanto, há uma diferença essencial: enquanto no domínio real construir funções não diferenciáveis em todos os pontos é um problema não trivial, na análise complexa poucas funções são diferenciáveis – mas aquelas que o são revelam propriedades de grande profundidade, permitindo um estudo mais abrangente e rigoroso.

A derivada de f em z_0, denotada por $f'(z_0)$, é definida pelo limite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

desde que esse limite exista. Equivalentemente, usando $\Delta z = z - z_0$, temos

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Se o limite existe, dizemos que f é diferenciável em z_0. As regras de derivação (soma, produto, cociente, cadeia) são as mesmas do caso real, mas não se pode supor que todos os resultados válidos para variáveis reais se apliquem às complexas. O cálculo da derivada de funções complexas exige que o estudante domine conceitos algébricos e geométricos fundamentais: limites complexos, manipulação algébrica de números complexos, interpretação geométrica das funções, continuidade e, especialmente, a verificação das condições de Cauchy-Riemann para determinar a diferenciabilidade e a holomorfia.

Dificuldades na aprendizagem de funções de variável complexa

A aprendizagem de funções de variável complexa é frequentemente marcada por dificuldades significativas, decorrentes sobretudo do elevado nível de abstração inerente a este domínio da matemática. Ao contrário de conteúdos mais intuitivos, como as funções reais de variável real, o estudo das funções de variável complexa exige que os estudantes lidem simultaneamente com diferentes formas de representação algébrica, trigonométrica e geométrica, o que pode gerar confusão conceitual.

Uma das principais dificuldades reside na compreensão do conceito de número complexo, especialmente na articulação entre a sua forma algébrica $z = x + yi$ e a sua representação gráfica no plano complexo. Muitos alunos apresentam fragilidades na interpretação do significado geométrico do módulo e do argumento, o que compromete a compreensão de operações como multiplicação e divisão de números complexos.

Além disso, tópicos mais avançados, como funções holomorfas, transformações conformes, integração complexa, séries de funções de variável complexa e polo e resíduos exigem uma capacidade elevada de raciocínio abstrato.

A noção dessas funções, por exemplo, não se limita a uma relação entre números, mas envolve transformações no plano, o que requer uma mudança de perspectiva por parte dos educandos.

Outro obstáculo relevante está relacionado com a visualização dos conceitos matemáticos. Diversos conceitos fundamentais da Análise Complexa – como a transformação de regiões do plano complexo ou o comportamento de funções em torno de singularidades – não são facilmente representáveis por métodos tradicionais de ensino (quadro e papel). Essa limitação favorece uma aprendizagem mecânica, baseada em manipulações algébricas, sem que haja compreensão profunda dos fenômenos matemáticos.

As dificuldades na aprendizagem de funções de variável complexa são de natureza múltipla: cognitiva (abstração, visualização, dependência de caminho), algébrica (manipulação de números complexos), didática (limitação dos recursos tradicionais, currículos inadequados) e afetiva (crenças negativas). Na Escola Superior de Ciências Sociais, Artes e Humanidades de Mbanza Kongo (ESCISAH), acrescenta-se a esse quadro uma frequente desconexão entre teoria e aplicação prática, o que reduz a motivação dos estudantes. A superação desses obstáculos requer o uso intencional de tecnologias interativas (como o Maple), metodologias ativas (aprendizagem baseada em problemas) e uma formação docente que integre conhecimento matemático, pedagógico e tecnológico.

Discussão sobre visualização matemática digital

Diversos pesquisadores destacam que as mídias de visualização assumem funções relevantes como facilitadoras dos processos de ensino e aprendizagem. Nesta vertente, Flores (2010), afirma que a partir da percepção humana visual, diversas pesquisas surgiram em torno da visualização, sobretudo sobre seu papel nos processos de ensino e aprendizagem de Matemática. Este autor enfatiza ainda que, o termo "visualização" é mais usado quando existem conexões entre as apreensões perceptiva e operatória.

"Em matemática, a visualização não é um fim em si mesma, mas um meio para um fim, que é a compreensão" (ZIMMERMANN; CUNNINGHAM, 1991, p. 3). Já Presmeg (2006) define a visualização matemática como o processo de construção e transformação de imagens mentais e visuais que envolvem a Matemática, permitindo entender e explorar os fenômenos matemáticos em nossa mente. Zimmermann e Cunningham destacam que a visualização matemática é "[...] a capacidade do aluno para desenhar (formular) um diagrama (imagem mental) apropriado (com lápis e papel, ou, em alguns casos, com um computador) para representar um conceito matemático ou problema e usar esse diagrama como auxílio na resolução de problemas, alcançando a compreensão (da Matemática)."

Complementando, Guzmán (1996, apud FLORES et al., 2012, p. 34) afirma que a "visualização em matemática constitui um aspecto importante da atividade matemática onde se atua sobre possíveis representações concretas enquanto se descobrem as relações abstratas que interessam ao matemático".

A visualização matemática digital, especificamente, refere-se ao uso de tecnologias computacionais para criar representações gráficas, interativas e dinâmicas de conceitos, estruturas e relações matemáticas. Essa abordagem difere da estática tradicional (lousa, papel) por permitir: a) interatividade (manipular parâmetros em tempo real); b) multirrepresentação (ver simultaneamente gráfico, tabela e equação); c) exploração de cenários (zoom, rotação, animação); e d) escalas não humanas (visualizar fractais, espaços de alta dimensão projetados). Ferramentas gratuitas como GeoGebra, Desmos, Python com Matplotlib/Plotly ou bibliotecas JavaScript tornam esses conceitos matemáticos acessíveis.

Contudo, a eficácia da visualização digital em matemática exige alguns cuidados: articulação com a demonstração analítica (visualizar e provar); limitação da complexidade interativa (poucos parâmetros controláveis por vez); inclusão de tarefas preditivas (ex.: "antes de mover o controle, desenhe o que espera ver"); estímulo à criação pelo aluno (programar suas próprias visualizações, com Python ou Scratch, em vez de apenas consumi-las); e validação cruzada (confrontar a visualização com cálculos numéricos e raciocínio dedutivo). Exemplos frequentes são gráficos $3D$ rotacionáveis, simulações de sistemas dinâmicos, geometria dinâmica (GeoGebra), visualização interativa de dados estatísticos e superfícies de funções complexas.

O Maple como recurso didático para o ensino de funções de variável complexa

Diversos recursos computacionais podem ser utilizados no ensino da Análise Complexa, entre os quais se destacam o GeoGebra, o Matlab, o Maxima, o Maple, etc. No estudo de funções complexas, tais ferramentas representam um complemento essencial à abordagem algébrica, principalmente por expandirem as possibilidades de representação gráfica.

Nesta pesquisa, foi selecionado o sistema de álgebra computacional *Maple* (versão 18), devido à sua avançada capacidade de visualização e manipulação matemática. Este *software* efetua operações simbólicas e algébricas, bem como constrói gráficos em duas e três dimensões, favorecendo uma melhor compreensão dos conteúdos abordados.

O Maple consiste de três partes principais: o núcleo (kernel), que é a parte central do *software*, escrita em linguagem C, onde são realizadas as operações; as livrarias (packages), que são um conjunto de funções pré-definidas e que são acionadas por uma sintaxe própria, quando necessário; e finalmente, a interface do usuário, chamada folha de trabalho (worksheet), onde se realizam as operações de entrada e saída.

Este *software* matemático permite aos discentes trabalhar simultaneamente com diferentes representações dos números e funções complexas no plano complexo. A possibilidade de alternar entre formas algébricas, trigonométricas e gráficas facilita a construção de conexões conceituais, contribuindo para uma compreensão mais integrada dos conteúdos.

Além disso, o uso do *Maple* promove uma abordagem exploratória da aprendizagem, permitindo que os discentes manipulem parâmetros, testem hipóteses e observem resultados em tempo real. Essa interatividade incentiva a investigação e o pensamento crítico, favorecendo um maior envolvimento no processo de aprendizagem e tornando-o mais ativo e significativo.

O seu uso no ensino de Análise Complexa revelou-se um recurso valioso para ampliar a compreensão dos conceitos fundamentais da disciplina. A partir desse entendimento, os estudantes passaram a desenvolver habilidades na resolução de exercícios envolvendo funções de variável complexa e suas representações gráficas. Como ferramenta didática, esse *software* deve ser explorado não apenas como apoio ao ensino-aprendizagem, mas como um meio de estimular a formulação de novas conjeturas, a criação de estratégias de resolução de exercícios e a consolidação de conceitos pelo próprio educando, favorecendo um aprendizado ativo e significativo.

A ausência de ferramentas que permitam explorar os conceitos de forma dinâmica dificulta a construção de significados e o desenvolvimento de uma aprendizagem mais sólida.

O uso do Maple também pode ser integrado a metodologias ativas de ensino, como a aprendizagem baseada em problemas etc. No estudo das equações de Cauchy-Riemann, por exemplo, os estudantes podem utilizar o *software* matemático para verificar se determinada função é analítica num domínio específico, comparando resultados e explorando diferentes exemplos de forma autónoma e investigativa.

Comparação entre Maple e outras plataformas como GeoGebra e Matlab

Ferramentas como Maple, Matlab e GeoGebra transformam a interação dos estudantes com conteúdos matemáticos, permitindo experimentar e compreender conceitos de maneira concreta. Além disso, sua utilização no processo de ensino-aprendizagem oferece novas perspectivas para a prática pedagógica, contribuindo para o desenvolvimento de habilidades fundamentais no raciocínio matemático, tais como resolução de problemas, pensamento crítico e modelagem matemática.

A escolha entre essas três plataformas depende inteiramente dos objetivos do utilizador. Embora todas sejam ferramentas relevantes no domínio da Matemática e da Engenharia, cada uma apresenta características e finalidades específicas. O Maple é um Sistema de Álgebra Computacional (CAS) concebido para manipular expressões e equações matemáticas complexas de forma simbólica. Entre as suas principais funcionalidades destacam-se a derivação de fórmulas, a simplificação algébrica e a resolução exata de equações. Além disso, permite a criação de gráficos bidimensionais e tridimensionais de elevada qualidade técnica, bem como de animações que facilitam a visualização de conceitos abstratos, como superfícies de Riemann e tensores.

O Matlab (Matrix Laboratory) constitui uma linguagem de programação de alto nível e um ambiente computacional amplamente utilizado em aplicações científicas e de engenharia. Segundo Espinoza (2022, p. 51), "o Matlab oferece um ambiente propício para o desenvolvimento de habilidades analíticas, permitindo que os alunos explorem funções matemáticas e suas propriedades de maneira interativa". Essa funcionalidade deste *software* permite aos alunos visualizar e manipular funções matemáticas em tempo real, proporcionando uma compreensão concreta de conceitos que, de outra forma, seriam abstratos. O uso de gráficos e a capacidade de modificar parâmetros de equações oferece aos alunos uma maneira prática de observar as mudanças em variáveis e seus efeitos, favorecendo o desenvolvimento do raciocínio matemático.

O GeoGebra é um *software* gratuito de matemática dinâmica que reúne, numa única plataforma, ferramentas de geometria, álgebra, folhas de cálculo, gráficos, estatística e cálculo. Dispõe ainda de um módulo de Álgebra Computacional (CAS) adequado ao contexto escolar e aos primeiros anos do ensino superior, permitindo realizar operações como derivação, integração de funções reais de variável real e fatoração de polinómios. Destaca-se pelo seu caráter educativo, favorecendo a exploração interativa de conceitos matemáticos e a sua representação visual, o que facilita a compreensão e a demonstração de conteúdos de forma intuitiva.

Beato-Diaz, Tineo e Aray (2025, p. 124), enfatiza que o GeoGebra permite que os alunos explorem conceitos matemáticos de forma dinâmica, facilitando a visualização de problemas complexos e a compreensão de abstratos conceitos matemáticos.

A seguir, apresenta-se um quadro comparativo destas plataformas.

Quadro 1. Comparação dos três softwares matemáticos

Critério	*Softwares*		
	Maple	**MATLAB**	**GeoGebra**
Natureza Principal	Simbólica (Analítica)	Numérica (Matricial)	Dinâmica (Pedagógica)
Público-Alvo	Matemáticos, Físicos, Pesquisadores	Engenheiros, Cientistas de Dados	Docentes, Estudantes
Preço/Licença	Comercial	Comercial	Gratuito / Open Source
Interface de Usuário	Documento estilo *Notebook*	IDE de Programação clássica	Tela dividida (Álgebra/Gráfico)

Fonte: Elaborado pelos autores

Formação docente para integração pedagógica de CAS

A formação docente para integração pedagógica de Sistemas de Álgebra Computacional (CAS) deve atender à diversidade dos contextos educacionais angolanos, não havendo um modelo único eficaz, mas múltiplas possibilidades adaptáveis à realidade de cada instituição e comunidade. Segundo Valente (2019), essa formação precisa ser situada, contextual e participativa, promovendo a reflexão do professor sobre sua prática e o significado das tecnologias em seu ambiente de atuação. Essa perspectiva reforça a necessidade de políticas educacionais descentralizadas e sensíveis às especificidades locais.

Os CAS são *softwares* que manipulam símbolos algebricamente: fatoram, expandem, derivam, integram, resolvem equações e simplificam expressões matemáticas.

Na maioria dos cursos de licenciatura em Ensino da Matemática ou em formações continuadas, o CAS é tratado de duas formas inadequadas: a) abordagem instrumental pura – ensina-se comandos, sintaxe e funcionalidades, sem discutir o porquê, o quando e o contexto de uso; b) abordagem permissiva ou proibicionista sem critério – ou se veta o CAS sob o argumento de que "o aluno precisa fazer tudo na mão", ou se libera sem estrutura, gerando dependência e falsa compreensão.

Para superar essas limitações, a formação docente deve integrar quadros teóricos (como a Teoria dos Registros de Representação e a Orquestração Instrumental) para analisar o papel do artefato; experiências de planejamento em que o professor elabore tarefas que integrem CAS e lápis/papel; e discussão sobre avaliação – como distinguir o que o aluno entendeu do que o *software* fez por ele. Além disso, a formação deve contemplar quatro dimensões principais:

a) Domínio técnico contextualizado – Não basta saber o comando solve(...); o professor precisa: resolver o mesmo problema com ou sem CAS; identificar as limitações do *software*; e conhecer os diferentes níveis desse Sistema.
b) Conhecimento didático do conteúdo tecnológico – O docente deve integrar conhecimento matemático, pedagógico e tecnológico, sendo essencial identificar onde a articulação entre esses três domínios gera novas oportunidades ou novos obstáculos.
c) Orquestração instrumental – O conceito de orquestração instrumental é central: o docente planeja como o artefato CAS será utilizado em diferentes momentos da aula – por exemplo, na exibição (professor mostra, alunos observam), na ação individual (cada estudante explora), na discussão coletiva sobre resultados do CAS e na verificação dos dados (CAS versus cálculo manual).
d) Concepção de tarefas exploratório-investigativas – O CAS permite redesenhar tarefas, mudando seu estilo. Em vez de "resolva a equação", propõe-se: "Utilize o CAS para resolver equações complexas do tipo $az^2 + bz + c = 0$, variando a, b e c. Descreva um padrão relativo ao discriminante. Depois, explique por que isso acontece – sem o auxílio do CAS." Na formação, os professores devem transformar tarefas tradicionais, incorporando o CAS como ferramenta de experimentação e validação, não apenas de obtenção de respostas.

Assim, uma formação docente eficaz para a integração do CAS em Angola não se resume ao treinamento técnico, mas envolve uma reflexão pedagógica profunda, contextualizada e alinhada às realidades locais.

Aprendizagem baseada em problemas de análise complexa

A Aprendizagem Baseada em Problemas (ABP) surge como uma metodologia centrada no estudante, afastando-se dos modelos tradicionais ao propor a resolução de problemas reais como eixo do processo educacional. Conforme Santos et al. (2025), essa abordagem tem ganhado relevância na formação docente e em diversas etapas da educação por promover autonomia, pensamento crítico e aplicação prática do conhecimento. Nessa linha, Gonçalves,

Gonçalves e Gonçalves (2020, p. 3) destacam que a ABP estimula uma aprendizagem ativa, na qual os alunos identificam e solucionam problemas reais, desenvolvendo competências essenciais para a vida profissional e pessoal.

No ensino da Análise Complexa – disciplina frequentemente vista como abstrata e repleta de teoremas contra-intuitivos (ex.: uma função diferenciável uma vez é infinitamente diferenciável) – a ABP transfere o foco da memorização para a resolução de um problema-âncora oriundo do mundo real ou da física teórica. Para solucioná-lo, os estudantes precisam descobrir e aplicar conceitos como funções holomorfas, resíduos e transformações conformes. Em vez de iniciar com as equações de Cauchy-Riemann, o docente apresenta uma situação-problema. Organizados em pequenos grupos, os alunos percorrem um ciclo de aprendizagem: (1) análise do problema (conhecimentos prévios e lacunas); (2) estudo autônomo (ferramentas matemáticas como integração no plano complexo); (3) aplicação e discussão dos conceitos; (4) reflexão, formalizando os teoremas descobertos. Assim, a ABP torna a Análise Complexa mais acessível e significativa, conectando teoria e prática por meio de desafios concretos.

Desenvolvimento de autonomia discente mediada por tecnologia

O desenvolvimento da autonomia discente é um pilar central da educação contemporânea, associado à formação de sujeitos críticos, criativos, dinâmicos e capazes de decidir fundamentadamente sobre suas trajetórias. Num mundo de rápida evolução informacional, o aluno passa de receptor passivo a agente ativo do próprio conhecimento. Freire (2019) afirma que educar para a autonomia significa permitir que os estudantes construam consciência de si, do mundo e da sua capacidade de intervir nele, rompendo com modelos tradicionais que os reduzem à condição de meros expectadores. Nesse sentido, a autonomia envolve responsabilidade, reflexão e intencionalidade, num processo contínuo que se desenvolve na interação dialógica com professores, colegas e a própria realidade.

O protagonismo estudantil, por sua vez, representa a manifestação concreta da autonomia na prática educativa. Segundo Zara (2020), tornar-se protagonista é assumir papel ativo na definição de metas, na investigação de problemas e na busca por soluções, posicionando-se como sujeito do conhecimento e não como mero executante de tarefas escolares. Esse protagonismo demanda ambientes que acolham a criatividade, permitam a livre expressão de ideias e valorizem a participação em processos decisórios, rompendo com modelos pedagógicos rígidos centrados exclusivamente na memorização e repetição.

Quando mediada pela tecnologia, a autonomia não significa deixar o aluno isolado diante de uma tela, mas sim empoderá-lo com ferramentas que permitam autorregular sua aprendizagem, explorar caminhos personalizados e produzir conhecimento de forma crítica. Para que a tecnologia gere autonomia – e não apenas distração ou dependência digital –, deve basear-se em três dimensões psicológicas e pedagógicas:

1. Autorregulação e gestão do tempo – O aluno precisa saber planejar, monitorar e avaliar seu próprio progresso. A tecnologia oferece suporte visual e organizacional, como painéis digitais que exibem metas, prazos e nível de proficiência.

2. Personalização e ritmo próprio – Como nem todos aprendem na mesma velocidade, a tecnologia rompe a rigidez da "aula padrão de 50 minutos". Ambientes virtuais permitem pausar vídeos, revisar conceitos em simulações 3D ou avançar para módulos superiores quando o básico já foi dominado.

3. Agência e produção de conteúdo – O estudante autônomo deixa de ser mero consumidor de mídia e torna-se *prosumidor* (produtor + consumidor). Ferramentas digitais possibilitam criar podcasts, infográficos, códigos de programação ou portfólios digitais para demonstrar o que aprendeu.

Dessa forma, a tecnologia só atua como alavanca para a autonomia e o protagonismo se for bem mediada e estiver alinhada a condições equitativas de acesso e a uma prática pedagógica consistente.

Avaliação de longo prazo da retenção conceitual após intervenções tecnológicas

A avaliação de longo prazo da retenção conceitual representa o teste para qualquer inovação pedagógica. Em intervenções tecnológicas – como simuladores, realidade virtual, *softwares* (Matlab, GeoGebra) ou plataformas adaptativas – o grande desafio não é medir o entusiasmo inicial do estudante ou o ganho imediato em testes, mas sim verificar se a estrutura cognitiva profunda foi alterada. Isso ocorre porque a tecnologia frequentemente gera o chamado "efeito novidade", que infla o engajamento de curto prazo. Avaliar a retenção após meses ou anos exige um desenho metodológico robusto e a compreensão de como o cérebro consolida conceitos abstratos, como os da análise complexa.

As tecnologias digitais trazem desafios à avaliação online, especialmente pela ausência de sinais presenciais (Santos, 2018), mas também oportunidades para promover retenção conceitual de longo prazo (Dorotea, 2018). Diferentemente da memorização factual, sujeita à Curva do Esquecimento, a retenção duradoura beneficia-se de mecanismos neurocognitivos como a codificação dual e a aprendizagem incorporada, estimulados por ambientes visuais e interativos.

Metodologias para medir a retenção de longo prazo

Para avaliar se uma intervenção tecnológica funcionou, pesquisadores e instituições utilizam desenhos experimentais específicos:

a) Testes de atraso temporal: Aplica-se pós-teste imediato e reaplica equivalente após meses/ano (sem aviso). Mede o decaimento da aprendizagem. Tecnologias eficazes reduzem esse decaimento.

b) Inventários de conceitos: Testes padronizados focados na compreensão conceitual, não em rotinas. Aplicados um ano depois para verificar a persistência ou correção de equívocos.

c) Avaliação baseada em desempenho em disciplinas sequenciais: Avalia o impacto da intervenção no desempenho em disciplinas posteriores que dependem do conteúdo prévio. Exemplo: maior retenção e aprovação em disciplinas avançadas de Análise Complexa.

Desafios na avaliação de longo prazo

Avaliar o longo prazo é complexo devido a variáveis que o pesquisador não consegue controlar, tais como:

1. Efeito de contaminação: Aprendizagem externa à intervenção (outras disciplinas, internet, estágio) contamina a medição do efeito real da tecnologia.

2. Desgaste da amostra: Perda de participantes ao longo do tempo por evasão, troca de curso ou desinteresse em testes pós-disciplina.

3. Falta de alinhamento construtivo: Desalinhamento entre o que a tecnologia ensinou (conceitos) e o que a avaliação mede (memorização) invalida a medição do ganho real.

Portanto, para validar inovações tecnológicas no ensino, é necessário adotar metodologias robustas de avaliação longitudinal que capturem a retenção conceitual para além do entusiasmo momentâneo.

METODOLOGIA

A presente investigação adota uma abordagem metodológica mista, combinando procedimentos quantitativos e qualitativos de forma complementar. A opção por essa abordagem justifica-se pela necessidade de analisar, simultaneamente, a incidência das dificuldades dos estudantes no estudo das funções de variável complexa e os fatores pedagógicos e cognitivos que influenciam o processo de ensino-aprendizagem.

Quanto ao desenho da investigação, o estudo caracteriza-se como uma pesquisa interventiva de natureza quase experimental, com aplicação de uma proposta didática destinada a minimizar as dificuldades de aprendizagem identificadas nos estudantes do 2.º ano do curso de Ensino da Matemática da Escola Superior de Ciências Sociais, Artes e Humanidades de Mbanza Kongo. O desenho prevê a realização de um diagnóstico inicial das dificuldades, a implementação da intervenção pedagógica e a avaliação dos seus efeitos por meio da comparação dos resultados obtidos antes e após a intervenção.

Na componente quantitativa, foram recolhidos dados referentes ao desempenho acadêmico dos discentes através de testes diagnósticos e de avaliação. Os instrumentos foram submetidos à validação de conteúdo por especialistas da área de Matemática e de Didática da Matemática, visando assegurar a pertinência, clareza e adequação dos itens aos objetivos da investigação. Após a recolha dos dados, procedeu-se à análise estatística descritiva, recorrendo a medidas de frequência e percentagens, permitindo identificar padrões de erro, níveis de desempenho e a evolução dos resultados dos estudantes ao longo do estudo.

Na componente qualitativa, a investigação procurou compreender as percepções, dificuldades e estratégias de aprendizagem dos alunos relativamente às funções de variável complexa. Para esse efeito, foram analisadas as respostas abertas dos instrumentos aplicados, os registos de observação das aulas e outros elementos produzidos durante a intervenção. Os dados qualitativos foram tratados por meio da análise de conteúdo, envolvendo processos de categorização, codificação e interpretação temática, com vista à identificação dos fatores que condicionam ou favorecem a aprendizagem.

A integração dos resultados quantitativos e qualitativos ocorreu na fase de interpretação dos dados, possibilitando a triangulação das evidências e fortalecendo a validade do estudo. Essa estratégia possibilitou uma compreensão mais abrangente do fenómeno estudado e uma avaliação mais consistente da eficácia da proposta didática implementada. Complementarmente, foi utilizada a análise documental como técnica de recolha e tratamento de informações secundárias. Os documentos selecionados foram identificados, avaliados quanto à sua pertinência e analisados sistematicamente, contribuindo para a fundamentação teórica da investigação e para a contextualização do problema em estudo.

A análise documental permitiu identificar concepções teóricas, estudos anteriores, lacunas do conhecimento e abordagens metodológicas relacionadas ao tema, contribuindo para a formulação das questões de investigação e a interpretação dos resultados.

Em função da utilização sistemática de fontes científicas publicadas para a construção do referencial teórico, a presente investigação também se caracteriza como uma pesquisa bibliográfica.

Caracterização da população e da amostra

A amostra do estudo foi constituída por 69 participantes da Escola Superior de Ciências Sociais, Artes e Humanidades de Mbanza Kongo, dos quais 65 (94,2%) eram estudantes do 2.º ano do curso de Ensino da Matemática e 4 (5,8%) eram docentes da área de Matemática; contudo, as análises centrais da investigação incidiram sobre os 65 estudantes, por constituírem o público-alvo da intervenção pedagógica e terem participado nas fases de diagnóstico, implementação e avaliação da proposta didática, enquanto os docentes contribuíram como informantes qualificados, fornecendo informações complementares para a contextualização e interpretação dos resultados. A tabela abaixo ilustra a distribuição desses dados.

Tabela 1. Distribuição da amostra

Sujeito	Amostra				Total MF	Total %
	Masc.	%	Fem.	%		
Estudantes	57	82,6	8	11,6	65	94
Docentes	4	5,7	0	0	4	6
Total	61	88,4	8	11,6	69	100

Fonte: Trabalho de campo na ESCISAH, ano acadêmico 2025.

A composição da amostra evidencia uma predominância do sexo masculino, correspondente a 88,4% dos participantes, enquanto o sexo feminino representa 11,6%, conforme apresentado na tabela acima.

A participação de discentes de ambos os géneros contribuiu para uma análise mais abrangente e diversificada, possibilitando compreender diferentes vivências, percepções e expectativas em relação à aprendizagem da Análise Complexa. Essa diversidade reforça a consistência da investigação, uma vez que permite interpretar os resultados a partir de múltiplas perspectivas cognitivas e procedimentais, conferindo maior solidez ao diagnóstico das dificuldades enfrentadas por esses estudantes.

Técnicas e instrumentos de recolha de dados

A recolha de dados realizou-se através de técnicas e instrumentos complementares, alinhados ao desenho metodológico misto do estudo.

Entrevista semiestruturada: Foi aplicada aos docentes da disciplina de Análise Complexa com o objetivo de recolher informações sobre os métodos de ensino utilizados, a organização dos conteúdos curriculares e as principais dificuldades apresentadas pelos alunos no estudo das funções de variável complexa.

Análise documental: Consistiu na consulta e análise do programa da disciplina, dos manuais didáticos e de outros documentos acadêmicos relevantes, visando identificar os conteúdos programáticos, as competências a desenvolver e as orientações metodológicas que fundamentam o processo de ensino-aprendizagem.

Questionário: Foi aplicado aos discentes do 2.º ano do curso de Ensino da Matemática para recolher informações sobre as suas percepções relativamente à utilização do *software* Maple no processo de aprendizagem, incidindo sobre a sua usabilidade, utilidade pedagógica e contributo para a compreensão dos conteúdos da disciplina.

Observação direta: Realizada de forma sistemática durante as aulas, permitiu registar o nível de participação dos estudantes, as interações ocorridas durante as atividades pedagógicas e as dificuldades evidenciadas na resolução de tarefas relacionadas com as funções de variável complexa.

Teste diagnóstico (pré-teste): Aplicado antes da implementação da intervenção pedagógica, teve como finalidade avaliar os conhecimentos prévios dos alunos sobre funções de variável complexa, constituindo a linha de base para a análise da evolução da aprendizagem. O instrumento de avaliação consistiu num questionário de três perguntas, no qual a primeira e a segunda se desdobram em duas alíneas cada. A cotação estruturou-se da seguinte forma: 8 valores para a primeira pergunta, 8 para a segunda e 4 para a última, perfazendo a totalidade de 20 valores.

Teste de avaliação final (pós-teste): aplicado após a intervenção pedagógica com o *software* Maple, permitiu avaliar os conhecimentos adquiridos e os efeitos da abordagem. A comparação com o pré-teste possibilitou analisar os ganhos de aprendizagem e o desenvolvimento das competências previstas.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

Nesta seção, apresentam-se os resultados significativos organizados em categorias temáticas, seguidos de uma discussão crítica que relaciona as constatações empíricas aos referenciais teóricos e às práticas pedagógicas contemporâneas. O objetivo é compreender não apenas as limitações conceituais e procedimentais dos estudantes, mas também avaliar a eficácia das metodologias ativas adotadas pelos docentes e propor caminhos e soluções para o aprimoramento do ensino da disciplina de Análise Complexa na Escola Superior de Ciências Sociais, Artes e Humanidades (ESCISAH) de Mbanza Kongo, Zaire.

Observadas de aulas

A observação teve como finalidade analisar o modo de atuação dos docentes do 2º ano do curso de Ensino da Matemática no processo de ensino-aprendizagem das funções de variável complexa.

Nas três aulas observadas, ministradas por esses professores com grau acadêmico de Licenciado, verificou-se a predominância de um modelo tradicional, centrado na exposição do conteúdo e na resolução de exercícios relacionados à multiplicação e divisão de números complexos nas formas algébrica e trigonométrica, bem como à aplicação das propriedades da unidade imaginária e da fórmula de De Moivre.

A observação concentrou-se nos seguintes aspectos:

- Ordenamento do conteúdo: sequência e organização dos tópicos abordados;
- Funções didáticas: cumprimento e estruturação das etapas pedagógicas;
- Uso das TICs: integração dos *softwares* matemáticos no ensino das funções de variável complexa;
- Formação ou elaboração do conceito: procedimentos utilizados para introduzir e consolidar os conceitos de número complexo, módulo e da unidade imaginária;
- Domínio do conteúdo: segurança e clareza na abordagem dos temas;
- Metodologias ativas: estratégias que favorecem a participação e colaboração dos discentes.

Durante as aulas, os docentes evidenciaram domínio dos conteúdos, embora não tenham utilizado recursos tecnológicos, como o Maple, que poderiam contribuir para a melhor compreensão das funções de variável complexa e das suas representações gráficas.

Entrevista Semiestruturada

Nas entrevistas realizadas com docentes, foram formuladas as seguintes questões:

1- Em que conteúdos da disciplina de Análise Complexa os docentes mais abordam com profundidade?

Nesta questão, os professores inquiridos afirmaram que o foco principal recai sobre a trigonometria, uma vez que o estudo dos números complexos é indissociável desta área. Um desafio identificado é a dificuldade dos estudantes em reconhecer o número complexo e o quadrante onde este se representa geometricamente. Frequentemente, os discentes não conseguem distinguir a sua representação no 1.º e no 3.º quadrantes, o que resulta na identificação incorreta do argumento. Além disso, os docentes enfatizaram que a escassez de tempo (disciplina semestral com carga horária de 3 horas semanais) impede o aprofundamento de temas subsequentes, como, limites, continuidade, derivadas de funções de variável complexa, regra de L'Hôpital e funções analíticas e harmônicas.

2- Considera as funções de variável complexa como um tema fundamental para a continuidade desta disciplina?

Para esta questão, os docentes responderam sim, é fundamental. Contudo, a gestão do tempo é o principal obstáculo que se verifica nesse processo, dado que a introdução aos números complexos consome a maior parte do tempo. Nesta fase inicial, definem-se conceitos do número complexo, módulo, conjugado e representação geométrica, além de operações essenciais do cálculo (adição, subtração, multiplicação e divisão) nas formas algébrica, trigonométrica e exponencial, recorrendo às fórmulas de Euler e de De Moivre para a resolução de equações complexas.

3- Sendo o programa de Análise Complexa composto por seis unidades de cumprimento obrigatório, considera polémico abordar apenas a primeira unidade?

Os entrevistados consideram que o programa atual dessa disciplina deve ser reelaborado para reduzir alguns subtemas ou, alternativamente, que a carga horária deve ser alargada, tornando a disciplina anual em vez de semestral. Esta necessidade justifica-se por ser uma das disciplinas estruturantes da Licenciatura em Ensino da Matemática.

4- Quais são as principais dificuldades encontradas no desempenho das atividades docentes na Escola Superior de Ciências Sociais, Artes e Humanidades de Mbanza Kongo?

Os docentes apontaram como maior dificuldade a ausência de bibliografia específica e material didático de Análise Complexa. Além disso, a falta de salas de informática equipada impede a instalação de *software*s matemáticos, que seriam essenciais para tornar as aulas mais dinâmicas, divertidas e aumentar a motivação e curiosidade dos estudantes.

5- Quais as dificuldades que os estudantes apresentam na aprendizagem das funções de variável complexa?

As dificuldades relacionam-se, em primeiro lugar, com a escassez de bibliografia e, em segundo, com lacunas em conhecimentos prévios essenciais, como os conceitos de função, limite (incluindo o tratamento das indeterminações dos sete tipos principais), continuidade e derivada de funções de uma variável real e suas regras.

6- Considera importante a introdução do *software* matemático Maple no ensino das funções de variável complexa?

Nesta questão, os docentes responderam sim. O uso de tecnologias é fundamental no ensino da Análise Complexa. A ausência de infraestruturas e de laboratórios de informática na instituição limita o trabalho com softwares matemáticos. O seu uso contribuiria para facilitar o estudo dos conteúdos, aumentar a motivação e envolver os estudantes no processo de aprendizagem.

7- Gostaria de acrescentar mais alguma ideia sobre o processo de assimilação dos alunos?

Alguns docentes optaram por não comentar, outros reforçaram que os professores que não aprofundam o estudo dos números complexos devem investir na sua própria formação para garantir uma base sólida. É importante evidenciar esforços para abordar as funções de variável complexa, pois estas constituem um dos temas fundamentais da disciplina, permitindo a abordagem de transformações conformes, integração de funções complexas, das séries e polos e resíduos.

A distribuição da faixa etária dos docentes entrevistados evidencia um perfil predominantemente adulto, em plena fase de desenvolvimento profissional, conforme detalhado no Quadro 2.

Quadro 2. Faixa Etária dos Respondentes

Faixa etária	Masc. Fa	Fr	Fem. Fa	Fr	Total	Porcentagem
30-35 anos	0	0	0	0	0	0%
35-40 anos	1	25	0	0	1	25%
40-45 anos	1	25	0	0	1	25%
Mais de 45 anos	2	50	0	0	2	50%
Total	**4**	**100**	**0**	**0**	**4**	100%

Fonte: Dados da pesquisa

Os dados apresentados no quadro indicam que a faixa etária predominante entre os docentes inquiridos corresponde ao grupo com mais de 45 anos, representando 50% da amostra. Este resultado evidencia um corpo docente maioritariamente constituído por profissionais com uma trajetória académica e pedagógica consolidada, característica que pode contribuir para a acumulação de experiência no ensino da Matemática e para uma compreensão aprofundada dos conteúdos da disciplina.

A segunda faixa etária mais representativa situa-se entre os 35 e os 45 anos, correspondendo a 25% dos participantes. Neste grupo, verificou-se a predominância de indivíduos do sexo masculino, evidenciando uma distribuição desigual de género entre os docentes pertencentes a este escalão etário.

De forma global, a distribuição etária sugere a coexistência de diferentes gerações de docentes no contexto investigado, permitindo a conjugação de experiências profissionais distintas. Contudo, dada a reduzida dimensão da amostra, os resultados são interpretados com prudência, não sendo possível estabelecer generalizações para além do grupo estudado.

Relativamente à formação académica dos docentes, os dados indicam uma participação reduzida de licenciados em Ensino da Matemática formados na própria instituição. Este resultado poderá refletir as características do processo de recrutamento docente e da disponibilidade de quadros especializados no contexto local, constituindo um elemento relevante para a compreensão da composição do corpo docente da instituição.

Para colmatar o défice de especialistas nacionais e garantir a continuidade acadêmica, as instituições recorrem à cooperação internacional, sendo este quadro significativamente reforçado por professores de nacionalidade cubana, que desempenham um papel crucial na sustentabilidade da Análise Complexa naquele estabelecimento de ensino superior.

Teste diagnóstico

O teste diagnóstico aplicado aos 65 estudantes do 2º ano teve como objetivo avaliar o nível de domínio das funções de variável complexa, identificando tanto a compreensão conceitual quanto a execução procedimental dos exercícios. A análise quantitativa permitiu medir a frequência de questões corretas e incorretas, evidenciando padrões de dificuldade e lacunas na aprendizagem.

O teste incluiu as seguintes perguntas:

1. Calcule:
   a) $\frac{5+5i}{3-4i}+\frac{20}{4+3i}$
   b) $|3z_1-4z_2|$, com $z_1=2+i$ e $z_2=3-2i$
2. Represente os seguintes números complexos no plano complexo e passe-os na forma trigonométrica:
   a) $z=-2+2i$
   b) $z=-3-2i$

3. Expresse a seguinte função complexa na forma

$f(z)=u(r,\varphi)+iv(r,\varphi)$ e determine as partes real e imaginária:

$$f(z)=z^2e^{2z}$$

Análise estatística do Pré-teste

A tabela 2 a seguir apresenta os resultados da correção do teste diagnóstico aplicado aos 65 estudantes do 2º ano.

Tabela 2. Resultados obtidos pelos estudantes no pré-teste

Notas (x_i)	Frequências (n_i)	n_ix_i	$(x_i-\bar{x})$	$(x_i-\bar{x})^2$	$n_i(x_i-\bar{x})^2$
2	8	16	-3,3	10,89	87,12
3	9	27	-2,3	5,29	47,61
4	3	12	-1,3	1,69	5,07
5	18	90	-0,3	0,09	1,62
6	10	60	0,7	0,49	4,9
7	9	63	1,7	2,89	26,01
8	4	32	2,7	7,29	29,16
10	3	30	4,7	22,09	66,27

12	1	12	6,7	44,89	44,89
	$n = 65$	$\sum_{i=1}^{n} n_i x_i$ =342			$\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \bar{x})^2$ =312,65

Fonte: Feito no Microsoft Excel

Com:

- x_i: Notas obtidas pelos estudantes numa escala de 20 valores;
- n_i: Frequência absoluta da distribuição;
- n: Tamanho de amostra em estudo;
- $\bar{x}$: Média Aritmética da distribuição.
- s^2: Variância;
- S: Desvio-padrão.

Para o cálculo da média aritmética da distribuição, aplicou-se a fórmula:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i \Leftrightarrow \bar{x} = \frac{1}{65}342 = 5{,}2615384615 \approx 5{,}3$$

$$\Longrightarrow \bar{x} = 5{,}3 \text{ valores}$$

Para o cálculo da variância (s^2), teremos:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{65}312{,}65 = 4{,}81$$

$$s^2 = 4{,}81 \Longrightarrow \mathrm{s} = \sqrt{4{,}81} = 2{,}1931712199 \approx 2{,}19$$

Portanto, o desvio-padrão da distribuição $\mathrm{s} \approx 2{,}19$.

Para determinar o coeficiente de variação usamos a fórmula:

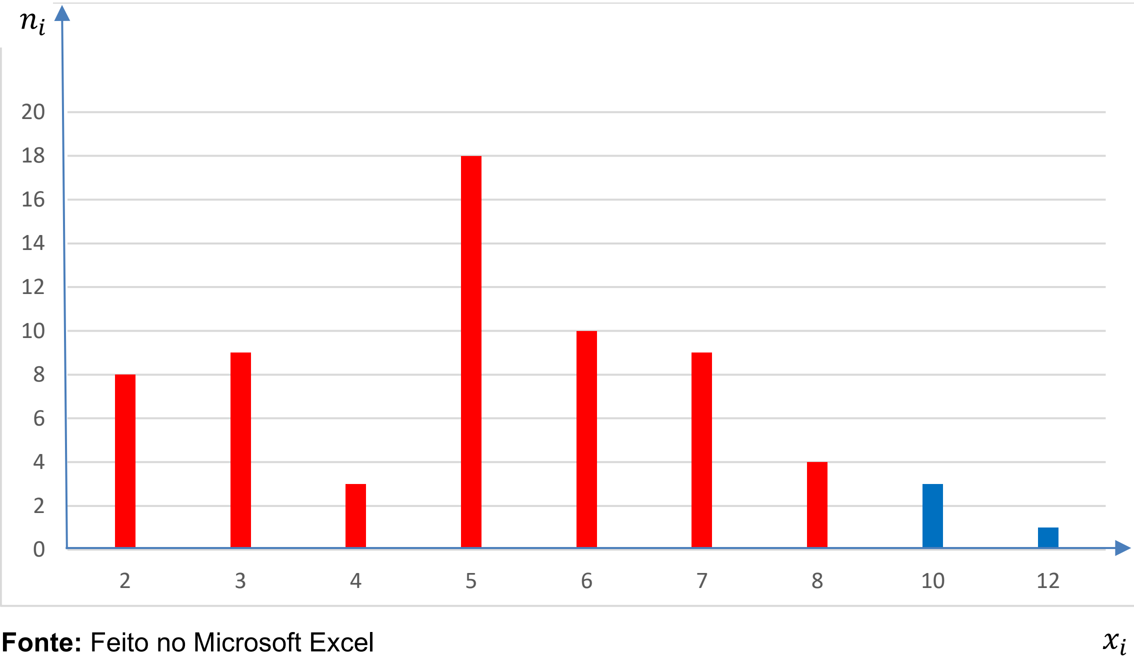
$$C.V = \frac{s}{\bar{x}} \times 100$$

$$CV = \frac{2{,}19}{5{,}3} \times 100 \Longrightarrow \mathrm{CV} = \frac{2{,}19}{5{,}3} \times 100 \Longrightarrow \mathrm{CV} = 0{,}41 \times 100 = 41\%$$

Como o coeficiente de variação (C.V.) é superior a 30%, verifica-se que a distribuição das notas obtidas apresenta elevada dispersão em torno da média aritmética. Isso indica alta variabilidade dos dados, caracterizando-os como heterogêneos e tornando a média menos representativa do conjunto de observações.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

Gráfico 1. Notas do pré-teste aplicado aos estudantes



Fonte: Feito no Microsoft Excel

Legenda

: Notas negativas.

: Notas Positivas.

Os dados analisados evidenciam a predominância de reprovações em relação às aprovações, fato que se torna mais evidente ao considerar a média aritmética das notas obtidas nesta amostra. Assim, os resultados sugerem a existência de dificuldades no processo de ensino-aprendizagem das funções de variável complexa, traduzidas numa média aritmética de 5,3 valores.

Os resultados obtidos resumem-se na seguinte tabela:

Tabela 3. Resultados do pré-teste aplicado aos estudantes do 2º ano da ESCISAH

Classificação	Género				MF	%
	M	%	F	%		
Mau	54	83	7	11	61	93,8%
Bom	3	4,6	1	1,5	4	6,2%

Muito Bom	0	0	0	0	0	0%
Excelente	0	0	0	0	0	0%
Total	57	12,9	0	0	65	100%

Fonte: Trabalho de campo na ESCISAH.

A análise dos resultados do teste diagnóstico evidencia um reduzido domínio dos conteúdos relacionados com as funções de variável complexa. Dos 65 estudantes avaliados, apenas 4 (6,2%) obtiveram classificação positiva, enquadrada no nível **Bom** (10 a 13 valores), enquanto nenhum estudante alcançou os níveis Muito Bom (14 a 16 valores) ou Excelente (17 a 20 valores). Em contrapartida, 61 estudantes (93,8%) registaram classificação negativa, correspondente ao nível Mau (0 a 9 valores).

Estes resultados indicam que a grande maioria dos participantes iniciou a disciplina sem os conhecimentos e competências considerados essenciais para uma aprendizagem satisfatória dos conteúdos programáticos.

Considerando a escala de classificação adotada, observa-se uma elevada concentração de estudantes no nível Mau, refletindo insuficiências significativas nos conhecimentos prévios sobre funções de variável complexa. Este resultado sugere a existência de lacunas na aprendizagem dos conteúdos fundamentais, o que poderá comprometer a compreensão e a assimilação dos tópicos subsequentes da disciplina.

Os resultados dos questionários reforçam as evidências do teste diagnóstico, uma vez que os estudantes apontaram a necessidade de diversificação das estratégias de ensino, com maior utilização de recursos tecnológicos e metodologias que favoreçam a compreensão dos conteúdos. Em conjunto, estes dados sugerem que as dificuldades observadas não se limitam ao desempenho individual dos discentes, mas também estão relacionadas com a adequação das práticas pedagógicas utilizadas no ensino da disciplina.

Face ao elevado número de classificações negativas registadas no pré-teste, foi implementada uma intervenção pedagógica baseada na utilização do *software* Maple, com o objetivo de apoiar a visualização, a exploração e a compreensão dos conceitos de funções de variável complexa. Para o efeito, foi realizada uma formação intensiva de 20 horas, distribuídas ao longo de cinco dias consecutivos, destinada aos estudantes participantes e aos docentes interessados. No primeiro dia da formação, procedeu-se à instalação do *software* e à familiarização dos participantes com o ambiente de trabalho do Maple. Foram apresentadas as principais funcionalidades da interface, os comandos básicos e os recursos necessários à realização das atividades matemáticas previstas, criando as condições para a utilização do *software* nas etapas subsequentes da intervenção.

No segundo dia, procedeu-se à sua utilização prática, representando graficamente a funções de variável complexa:

Como exemplo, temos a função

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$$

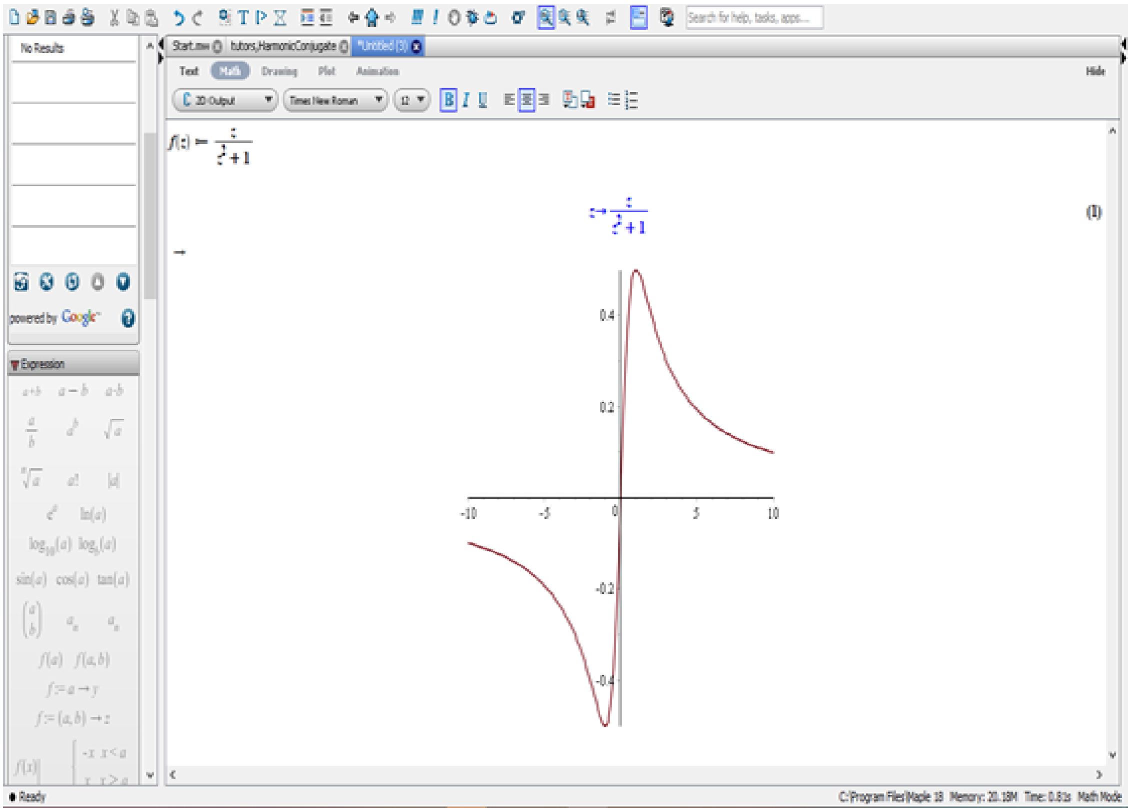
Para seu esboço gráfico, seguiu-se os seguintes passos metodológicos:

Passo 1. Abra o *software* Maple e clique na nova página;

Passo 2. Digite a função $f(z) := \frac{z}{z^2+1}$ e dê Enter;

Passo 3. Selecione o resultado que apareça na tela ($z \to \frac{z}{z^2+1}$), clique a direita e siga este esquema; Plots e por fim clique em $2D$ plot e automaticamente aparece a seguinte representação gráfica:

Figura 2. Esboço gráfico da função $f(z) := \frac{z}{z^2+1}$ em 2D



Fonte: Gerado pelo Sistema Informático Maple.

No terceiro, quarto e quinto dias da formação, os estudantes realizaram atividades práticas centradas na resolução de exercícios sobre limites e derivadas de funções de variável complexa, incluindo as tarefas previstas no estudo. Durante essas sessões, o *software* Maple foi utilizado como ferramenta de apoio à exploração dos conceitos, à visualização gráfica e à verificação dos resultados, contribuindo para uma compreensão mais consistente dos procedimentos analíticos envolvidos. Neste contexto, foram desenvolvidos diversos exercícios com recurso ao *software*, de modo a consolidar os conteúdos abordados e promover uma aprendizagem mais ativa.

A seguir, apresentam-se alguns exemplos dessas tarefas, acompanhados das respectivas resoluções com o auxílio do Maple.

1- Calcule o limite da função:

$$f(z) = 3xy + i(x - y^2)$$

Resolução

Neste exercício, os alunos utilizaram duas formas: na primeira, calcularam sem o uso da tecnologia, isto é, substituindo diretamente os valores das variáveis x e y por 1 e 2 respectivamente, ou seja,

$$\lim_{z \to 1+2i} f(z) = \lim_{z \to 1+2i} [3xy + i(x - y^2)] = 3.1.2 + i(1 - 2^2) = 6 + i(-3) = 6 - 3i$$

A outra forma consiste no uso de um *software* matemático. Para calcular o limite de funções de variável complexa no Maple, segue-se os seguintes passos:

Passo 1. Abra o Maple e digite $z := x + Iy$, em seguida dê Enter*;*

Passo 2. Digite a função $f(z) \coloneqq 3xy + i(x - y^2)$ e dê Enter*;*

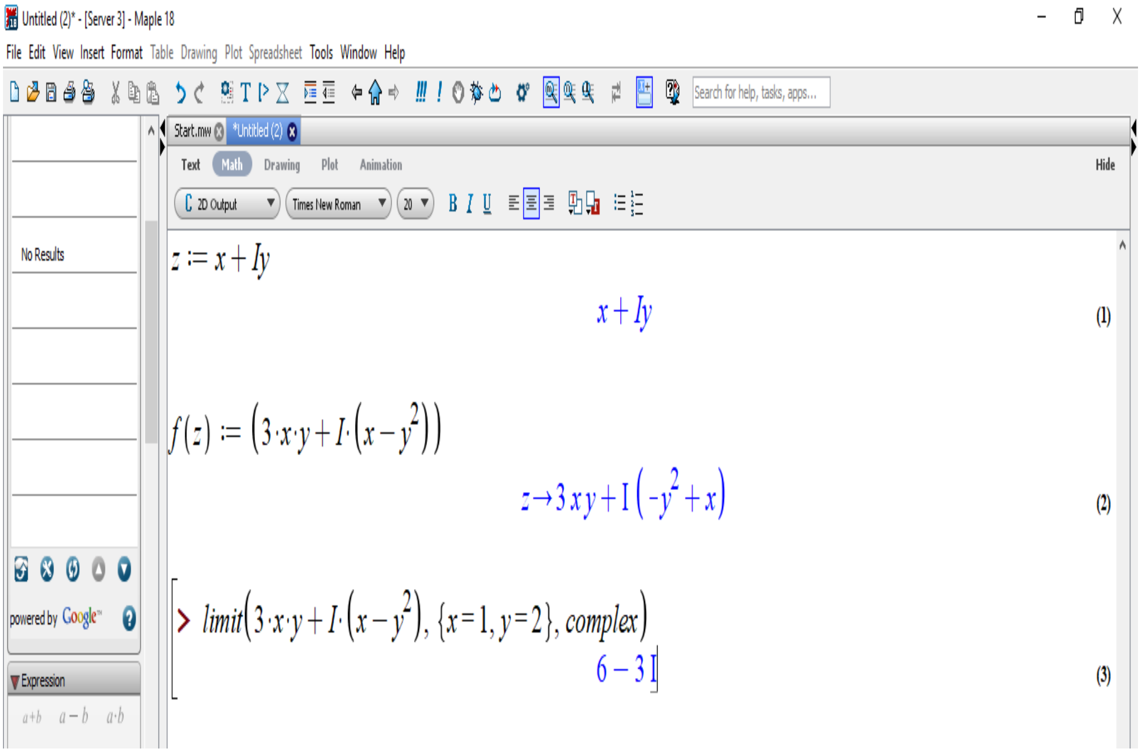
Passo 3. Digite os comandos no *prompt* (símbolo>) e escreva

$$li\,m\,it(3xy + i(x - y^2), \{x = 1, y = 2\}, complex)$$

Passo 4. Dê Enter para obter o resultado final.

A resolução aparece imediatamente na tela como mostra a figura 3.

Figura 3. Cálculo de limite de funções de variável complexa



Fonte: Gerado por *Maple*.

2- Calcule a derivada das seguintes funções de variável complexa:

a) $f(z) = (1 - 4z^2)^3$

b) $g(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{2z + 1}$

Resolução

Para esse caso, os estudantes calcularam simultaneamente a derivada das funções seguindo os seguintes passos metodológicos:

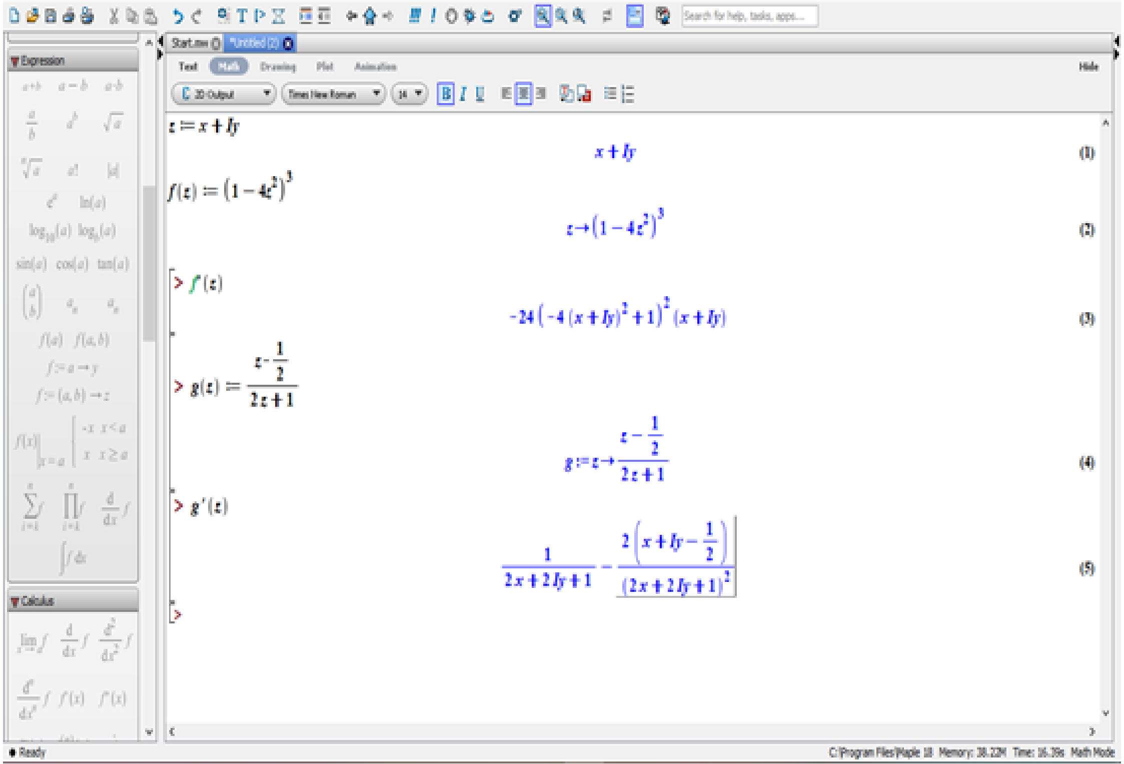
Passo 1. Abra o *software* Maple, digite $z := x + Iy$ e dê Enter*;*

Passo 2. Defina a função $f(z) = (1 - 4z^2)^3$, em seguida dê Enter*;*

Passo 3. Digite os comandos no *prompt* (símbolo >) e escreva $f'(z)$, em seguida dê Enter*;*

Siga o mesmo procedimento para calcular a derivada da função $g(z)$.

Figura 4. Cálculo da derivação das funções de variável complexa



Fonte: Gerado por *Maple*.

Estas atividades permitiram consolidar os conhecimentos teóricos previamente abordados e reforçar a compreensão dos procedimentos de cálculo.

No sexto dia, foi aplicada a avaliação final (pós-teste), composta por três questões relativas ao esboço gráfico, ao cálculo de limites e à derivada de funções de variável complexa.

O sistema de pontuação adotado atribuiu 4 valores à primeira questão, 8 à segunda e 8 à terceira, perfazendo um total de 20 valores.

O teste incluiu as seguintes perguntas:

1) Representar graficamente em 3D a seguinte função complexa:

$$f(z) = z^2$$

2) Calcular o seguintes:limite da função complexa

$$\lim_{z \to 1+i} (z^2 - 5);$$

3) Calcular a derivada da função.

$$f(z) = (2z + 3)^4$$

Análise Estatística do Pós-teste

A tabela seguinte apresenta os resultados obtidos pelos 65 estudantes do 2.º ano na correção do pós-teste. A análise destes resultados permite avaliar o nível de aprendizagem alcançado pelos alunos após a implementação da intervenção pedagógica, bem como verificar a evolução do seu desempenho relativamente aos conteúdos abordados.

Tabela 4. Resultados obtidos pelos estudantes no pós-teste

Notas (x_i)	Frequências (n_i)	$n_i x_i$	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	$n_i(x_i - \bar{x})^2$
5	1	5	-10,4	108,16	108,16
6	2	12	-9,4	88,36	176,72
8	2	16	-7,4	54,76	109,52
10	3	30	-5,4	29,16	87,48
11	1	11	-4,4	19,36	19,36
13	3	39	-2,4	5,76	17,28
14	4	56	-1,4	1,96	7,84
15	6	90	-0,4	0,16	0,96
16	9	144	0,6	0,36	3,24
17	18	306	1,6	2,56	46,08
18	12	216	2,6	6,76	81,12
19	4	76	3,6	12,96	51,84
	$n = 65$	$\sum_{i=1}^{n} n_i x_i$ =1001			$\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \bar{x})^2$ =709,6

Fonte: Feito no Excel

Para o cálculo da média aritmética da distribuição, aplicou-se a fórmula:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i \Rightarrow \bar{x} = \frac{1}{65}1001$$

$$\Rightarrow \bar{x} = 15{,}4 \text{ valores}$$

Para o cálculo da variância (s^2), teremos:

$$s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i(x_i - \bar{x})^2 \Rightarrow s^2 = \frac{1}{65}709{,}6 \approx 10{,}92$$

$$s^2 = 10{,}92 \Longrightarrow s = \sqrt{10{,}92} = 3{,}3045423284 \approx 3{,}305$$

Portanto o desvio-padrão da distribuição $s \approx 3{,}305$.

Para determinar o coeficiente de variação usamos a fórmula

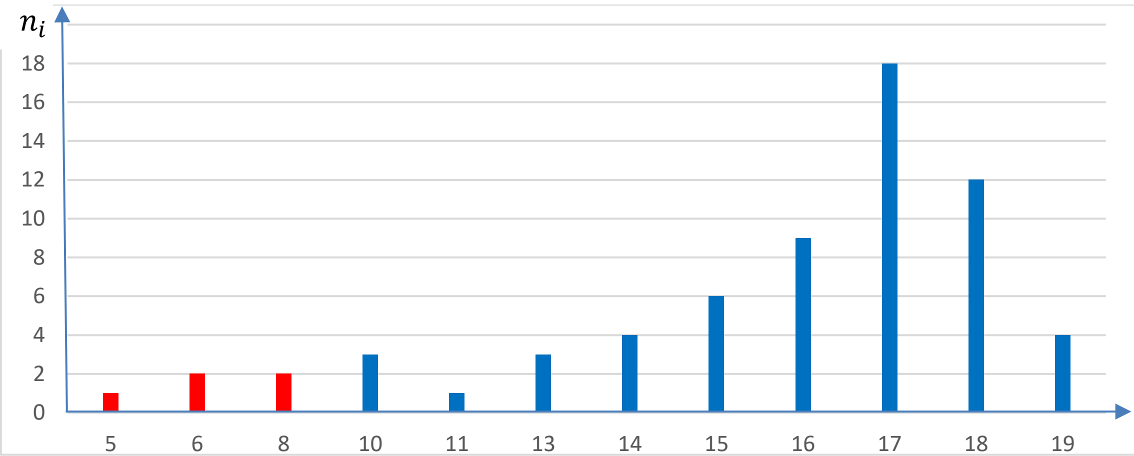
$$C.V = \frac{s}{\bar{x}} \times 100$$

$$Cv = \frac{3{,}305}{15{,}4} \times 100 \approx 0{,}215 \times 100 = 21{,}5\%$$

Como o $15\% \leq C.V < 30\%$ implica que a distribuição de notas obtidas admite uma variabilidade moderada em torno da média aritmética.

O gráfico abaixo ilustra as notas dos alunos obtidos no pós-teste

Gráfico 2. Notas do pós-teste aplicado aos estudantes



Fonte: Feito pelos autores

Legenda

: Notas negativas.

: Notas Positivas.

x_i

Os resultados do pós-teste evidenciam uma melhoria significativa em relação à situação observada no teste diagnóstico. Esta evolução reflete-se no aumento do desempenho acadêmico dos estudantes, expresso por uma média aritmética de 15,3 valores.

Assim, os resultados sugerem que a utilização do Maple constituiu um recurso pedagógico relevante no processo de ensino-aprendizagem das funções de variável complexa, contribuindo para uma melhor compreensão dos conteúdos e para a melhoria do aproveitamento acadêmico dos estudantes.

A tabela abaixo ilustra os resultados obtidos pelos alunos.

Tabela 5. Resultado do pós-teste aplicado aos estudantes do 2º ano da ESCISAH

Classificação	**Género**				**MF**	**%**
	M	**%**	**F**	**%**		
Mau	2	83	3	11	5	8%
Bom	3	4,6	4	1,5	7	11%
Muito Bom	18	0	1	0	19	29%
Excelente	34	0	0	0	34	52%
Total	57	12,9	8	12,5	65	100%

Fonte: Trabalho de campo na ESCISAH.

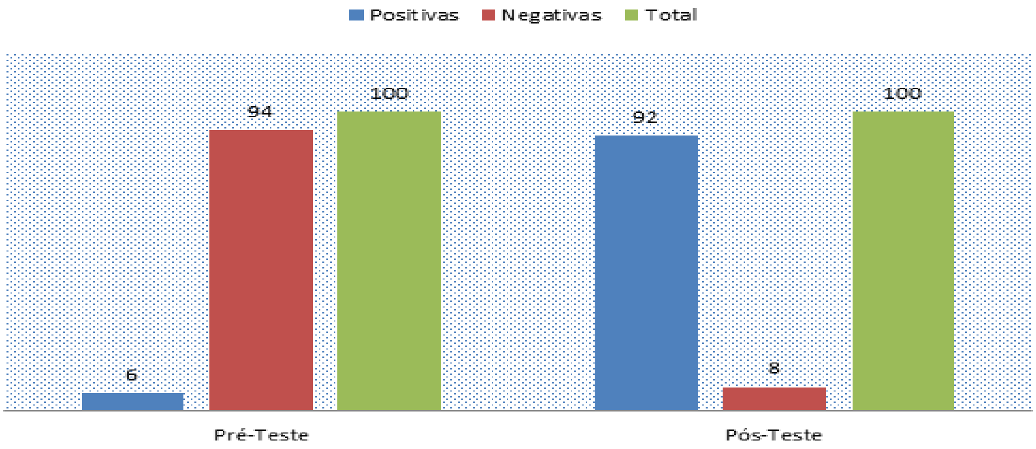
Os resultados apresentados na Tabela 5 indicam que, no pós-teste, os estudantes alcançaram um desempenho globalmente mais elevado quando comparado ao diagnóstico inicial. Observa-se que 8% dos discentes obtiveram classificação “Mau”, 11% “Bom”, 29% “Muito Bom” e 52% “Excelente”, sendo que, no conjunto, 92% atingiram níveis considerados satisfatórios.

Embora estes resultados sugiram uma melhoria expressiva no desempenho, importa referir que a sua interpretação deve considerar os limites inferenciais do estudo, nomeadamente a ausência de grupo de controle e a dimensão restrita da amostra, o que impede a generalização dos efeitos observados para além do contexto investigado. Assim, os ganhos identificados devem ser compreendidos como evidências indicativas da eficácia da intervenção no grupo estudado, e não como prova definitiva de causalidade.

Ainda assim, a evolução registada aponta para uma associação positiva entre a utilização do *software* Maple e o desenvolvimento das competências dos estudantes, na medida em que a mediação tecnológica parece ter favorecido a compreensão dos conteúdos e o envolvimento nas atividades de aprendizagem. Este resultado é coerente com a perspectiva de Borba, Malheiros e Amaral (2021, p. 73), ao destacarem que, na Matemática, a visualização constitui um processo essencial de construção de imagens mentais ou mediadas por tecnologias, contribuindo para a compreensão e descoberta de conceitos matemáticos.

Neste enquadramento, apresenta-se a seguir o gráfico comparativo dos resultados obtidos no pré-teste e no pós-teste, aplicados aos estudantes do 2.º ano do curso de Ensino da Matemática da Escola Superior de Ciências Sociais, Artes e Humanidades de Mbanza Kongo, Zaire.

Gráfico 3. Resultados comparativos de pré-teste e pós-teste aplicados aos estudantes do 2º ano



Fonte: Feito no Microsoft Excel

De acordo com o gráfico, os resultados do pré-teste evidenciam uma lacuna significativa na aprendizagem das funções de variável complexa, sugerindo elevada dificuldade dos estudantes do 2.º ano na compreensão destes conteúdos. Nesta perspectiva, Cavasotto e Viali (2011), entre outros, associam este desempenho, em grande medida, a fragilidades na formação matemática básica, particularmente em conteúdos do ensino fundamental e médio, o que compromete a progressão em disciplinas mais abstratas no ensino superior.

Perante este cenário, torna-se necessário considerar que tais dificuldades resultam de múltiplos fatores, exigindo respostas articuladas ao nível das práticas docentes e do papel do discente. Assim, o professor deve planear estratégias diferenciadas que atendam às necessidades individuais e procurem colmatar lacunas de aprendizagem, enquanto o estudante é chamado a assumir uma postura mais ativa e autónoma no processo de construção do conhecimento, superando a dependência excessiva do docente, conforme defendido por Masetto (2003, p. 79).

Neste enquadramento, reforça-se a importância da adoção de metodologias ativas associadas ao uso de *software* matemático no ensino da Análise Complexa. Bacich e Moran (2018, p. 42) destacam que a integração de metodologias ativas e tecnologias implica uma reorganização do processo educativo, promovendo aprendizagens mais significativas e integradas. De forma complementar, Perrenoud (2000, p. 123) sublinha o papel das tecnologias como facilitadoras da aprendizagem, ao transformarem as formas de comunicar, pensar e resolver problemas, enquanto Kaiber e Renz (2008, p. 115) salientam o seu potencial na representação dinâmica de conceitos abstratos, com impactos positivos na compreensão matemática.

Em contraste com o diagnóstico inicial, os resultados do pós-teste mostram uma evolução significativa, com 92% dos estudantes a atingir níveis satisfatórios de desempenho. Este resultado sugere que o uso do *software* Maple contribuiu para a redução das dificuldades de aprendizagem, ao favorecer a visualização, a exploração de conceitos e a automatização de procedimentos, tornando as aulas mais dinâmicas, interativas e compreensíveis.

Além disso, observou-se um aumento da motivação, curiosidade e participação ativa dos estudantes, bem como o desenvolvimento da autonomia na resolução de exercícios e na exploração dos conteúdos matemáticos. Verificou-se ainda um reforço da interação entre docente e discentes, promovendo um ambiente mais colaborativo de esclarecimento de dúvidas e construção conjunta do conhecimento.

Neste contexto, o *software* Maple revela-se um recurso pedagógico relevante no ensino das funções de variável complexa, ao potenciar o dinamismo e a visualização destes conteúdos. Segundo Rodríguez (2010), o dinamismo permite a transformação contínua de objetos matemáticos, possibilitando múltiplas representações, enquanto a visualização facilita a compreensão de conceitos complexos. A articulação destes dois elementos favorece a exploração, a experimentação e a generalização de conceitos, contribuindo para uma aprendizagem mais significativa e estruturada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A pesquisa analisou o uso do software Maple no ensino de funções de variável complexa para estudantes do 2.º ano de Matemática. Os resultados mostraram que o Maple facilitou a compreensão de conceitos abstratos (limites, derivadas, representação gráfica) por meio da visualização dinâmica e interativa, atuando como suporte cognitivo.

A visualização digital não substitui o pensamento abstrato; seu valor pedagógico depende do enquadramento metodológico. A integração de sistemas de álgebra computacional (CAS) exige que o docente atue como mediador, decidindo quando usar o software e quando fazer cálculos manuais. Sem essa orientação, o CAS torna-se instrumental; com formação adequada, promove modelação, conjectura e validação.

Os resultados do pós-testes indicaram melhoria no desempenho, autonomia e envolvimento dos estudantes; no entanto, as limitações observadas incluem o tempo de adaptação ao *software*, a dependência do planeamento docente e o contexto específico com amostra reduzida. Diante disso, as implicações práticas apontam para: (1) formação docente focada no desenho de tarefas investigativas; (2) currículo que integre tecnologia desde fases iniciais; e (3) infraestrutura adequada.

Em síntese, o Maple enriquece o ensino de Análise Complexa quando articulado com estratégias pedagógicas consistentes, formação docente e condições institucionais.

REFERÊNCIAS

BACICH, Lilian; MORAN, José Manuel. *Metodologias ativas para uma aprendizagem significativa*. Porto Alegre: Penso, 2018.

BEATO-DIAZ, O.; TINEO, A. J.; ARAY, C. A GeoGebra como herramienta didáctica para la comprensión del concepto matemático de la derivada direccional. *MQRInvestigar*, [S. l.], v. 9, n. 1, 2025. Disponível em: DOI do artigo. Acesso em: 12 jun. 2026.

BORBA, Marcelo de Carvalho; MALHEIROS, Ana Paula dos Santos; AMARAL, Rúbia Barcelos. *Educação a distância online*. 5. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2021. ISBN 9786586040753
BROWN, James Ward; CHURCHILL, Ruel Vance. *Complex variables and applications*. 8. ed. New York: McGraw-Hill, 2009.

CAVASOTTO, Márcia; VIALI, Lori. Dificuldades na aprendizagem de cálculo: o que os erros podem informar. *Boletim GEPEM*, n. 59, p. 15-33, jul./dez. 2011.

DIVINÓPOLIS, C. V. **Plano de curso da disciplina:** variáveis complexas. Brasil: Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais, 2019.

DOROTEA, N. M. T. C. *TRAIL:* transforming assessment into learning: conceptualização de plataforma digital adaptativa para avaliação formativa. 2018. Tese (Doutoramento) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 2018.

ESPINOZA, Juan de Dios. Simulación del modelo matemático de proliferación de células resistentes a la quimioterapia usando GEOGEBRA. *Alimentos Ciencia e Ingeniería*, [S. l.], v. 29, n. 1, p. 50-62, 2022. Disponível em: DOI do artigo. Acesso em: 12 jun. 2026.

FERNANDEZ, C. S.; BERNARDES JUNIOR, N. C. *Introdução às funções de uma variável complexa*. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2008.

FLORES, Cláudia Regina. Cultura visual, visualidade, visualização matemática. *Zetetiké*, Campinas, v. 18, Número Temático, p. 271-293, 2010.

FLORES, Cláudia Regina et al. Pesquisa em visualização na educação matemática: conceitos, tendências e perspectivas. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, v. 14, n. 1, p. 31-45, 2012.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra, 2019.

GONÇALVES, M. F.; GONÇALVES, A. M.; GONÇALVES, I. M. F. Aprendizagem baseada em problemas: uma abordagem no ensino superior na área da saúde. *Práticas Educativas, Memórias e Oralidades (Rev. Pemo)*, v. 2, n. 1, p. 1-12, 2020. Disponível em: Revista Pemo - artigo completo. Acesso em: 16 jun 2026.

HENZ, C. *O uso das tecnologias no ensino-aprendizagem da matemática*. Erechim: [s.n.], 2009.

KAIBER, C. T.; RENZ, S. Cálculo diferencial e integral: um abordaje utilizando el software Maple. 2008. p. 115. Disponível em: SciELO Venezuela - artigo completo. Acesso em: 12 jun. 2026.
MASETTO, Marcos Tarciso. *Competência pedagógica do professor universitário*. São Paulo: Summus, 2003.

NEEDHAM, Tristan. *Visual complex analysis*. Oxford: Oxford University Press, 2000.

PERRENOUD, Philippe. *Dez novas competências para ensinar*. Porto Alegre: Artmed, 2000.

PRESMEG, Norma. Research on visualization in learning and teaching mathematics. In: GUTIÉRREZ, A.; BOERO, P. (ed.). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*. The Netherlands: Sense Publishers, 2006. p. 205-235.

PÚCUTA, M. J. *El cálculo integral y sus aplicaciones: una estrategia didáctica con integración de las Tecnologías de la Información y las Comunicaciones*. 2016. Tese (Doutorado) – UCPEJV, La Habana, Cuba, 2016.

PÚCUTA, M. J. *Fundamentos de análise complexa: teoria elementar e exercícios resolvidos*. 1. ed. Cabinda, 2024. v. 1. ISBN 978-989-541-05-90.

RODRÍGUEZ, M. R. *Modelo de dirección del proceso de enseñanza-aprendizaje para docentes en formación en las microuniversidades politécnicas*. 2010. Tese (Doutorado) – Universidad Carlos Rafael Rodríguez, Cienfuegos, Cuba, 2010.

SANTOS, G. P. *Educação e tecnologia no interior da Amazônia: o pensamento computacional e as tecnologias da informação e comunicação como auxílio em processos de ensino-aprendizagem*. Orientador: José Ricardo e Souza Mafra. 2018. 182 f. Dissertação (Mestrado Acadêmico em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal do Oeste do Pará, Santarém, 2018. Disponível em: Repositório Institucional UFOPA. Acesso em: 11 jun. 2021.

SANTOS, S. M. A. V. et al. Aprendizagem baseada em problemas: despertando o pensamento crítico no cotidiano escolar. *Revista Ibero-Americana de Humanidades, Ciências e Educação*, v. 11, n. 9, p. 615-622, 2025.

SANTOS, F. B. *Sebenta de matemáticas de números complexos*. 5. ed. Lisboa, 2000. ISBN 972-770-095-0.

VALENTE, Wagner Rodrigues. Saber objetivado e formação de professores: reflexões pedagógico-epistemológicas. *História da Educação*, Santa Maria, v. 23, p. 1-22, 2019.

ZARA, R. *Protagonismo estudantil: desafios e possibilidades*. Curitiba: Appris, 2020.

ZIMMERMANN, Walter; CUNNINGHAM, Steve. Editors' introduction: what is mathematical visualization? In: ZIMMERMANN, Walter; CUNNINGHAM, Steve (ed.). *Visualization in teaching and learning mathematics*. Washington: MAA, 1991. p. 1-7.