RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

MÉTODOS ANALÍTICOS PARA ANÁLISE DE VIGAS SOBRE BASE ELÁSTICA

ANALYTICAL METHODS FOR THE ANALYSIS OF BEAMS ON ELASTIC FOUNDATIONS

MÉTODOS ANALÍTICOS PARA EL ANÁLISIS DE VIGAS SOBRE BASE ELÁSTICA

Luiz Carlos Mendes[1]

e656444
https://doi.org/10.47820/recima21.v6i5.6444

PUBLICADO: 5/2025

RESUMO
A análise de vigas sobre base elástica sob diversas condições de carregamento e diversos tipos de solo é feita utilizando-se a computação algébrica simbólica. As pressões de contato e diagramas de flechas são também pesquisados utilizando-se o método de Miklos Hethényi. A pesquisa faz o levantamento dos esforços em pontos fictícios considerando-se a viga infinita sob as diversas condições de carregamento. São determinados os esforços que anulam aqueles dos pontos fictícios. Estes esforços, assim determinados, são os carregamentos condicionantes de extremidade. Por fim, são sobrepostos os carregamentos externos e os carregamentos condicionantes de extremidade utilizando-se a análise de viga infinita. O resultado desta sobreposição permite a solução de uma viga finita.

PALAVRAS-CHAVE: Vigas sobre base elástica. Mecânica dos solos. Método de Hethényi.

ABSTRACT
The analysis of beams on elastic foundations under several loading conditions and different types of soil is performed through symbolic algebraic computation. Contact pressures and deflection diagrams are also investigated using the Miklos Hethényi method. The research surveys the forces at fictitious points considering the infinite beam under various loading conditions. The forces that cancel out all those efforts at the fictitious points are determined. These forces, thus determined, are the end-conditioning loads. At the end, the external loads and the end-conditioning loads are superimposed using the infinite beam analysis. The result of this superimposition allows the solution of a finite beam.

KEYWORDS: *Beams on elastic foundation. Soil Mechanic. Hethényi Method. Elastic subgrade.*

RESUMEN
El análisis de vigas sobre una base elástica bajo diferentes condiciones de carga y diferentes tipos de suelo se realiza mediante cálculo algebraico simbólico. También se investigan las presiones de contacto y los diagramas de flechas utilizando el método de Miklos Hethényi. La investigación examina los esfuerzos en puntos ficticios considerando la viga infinita bajo diferentes condiciones de carga. Se determinan los esfuerzos que anulan los de los puntos ficticios. Estos esfuerzos así determinados son las cargas finales de acondicionamiento. Finalmente, se superponen las cargas externas y las cargas de acondicionamiento de los extremos utilizando el análisis de vigas infinitas. El resultado de esta superposición permite la solución de una viga finita.

PALABRAS CLAVE*: Vigas sobre base elástica. Mecánica de suelos. Método Hethényi.*

INTRODUÇÃO

As vigas de base elástica estão relacionadas intimamente com a mecânica dos solos e envolvem os recalques decorrentes dos carregamentos impostos. Faz-se necessária a pesquisa dos esforços internos que ocorrem nestas vigas em função destes carregamentos externos e da natureza

[1] Doutor em Engenharia Civil pela COPPE/UFRJ. Mestre em Engenharia Civil pela Universidade Federal Fluminense. Engenheiro Civil pela Universidade Federal Fluminense. Professor Titular do Departamento de Engenharia Civil da UFF – Niterói – RJ.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

do solo, bem como os parâmetros geométricos da seção transversal envolvendo altura e largura de viga. Este artigo tem por objetivo analisar a viga apoiada sobre solo elástico, calculando-se os esforços solicitantes por meio do método de Hethenyi.

Neste trabalho será construído o método que obtém os esforços internos da fundação por meio das pressões de contato (p), que são as pressões na interface fundação-solo. A determinação de tais pressões se faz com a obtenção dos esforços internos na fundação, e, com estes, procede-se ao dimensionamento estrutural do elemento de fundação. A Figura 1 fornece uma idealização das pressões de contato e esforços decorrentes do carregamento externo e das pressões exercidas pelo conjunto solo-fundação.

1. RECALQUES SOB OS DIVERSOS TIPOS DE CARREGAMENTOS

Com a análise de diversos tipos de carregamentos, a Figura 1 fornece a evolução do recalque em uma fundação superficial, sob o efeito de uma única carga centrada Q.

A Figura 2 mostra os recalques com o decorrer do tempo w_{i1}, w_{t1}, w_{i2}, w_{t2}, w_{i3} e w_{t3} de uma fundação superficial sob o nível de cargas verticais Q_1, Q_2 e Q_3 centradas.

O recalque final é expresso por:

$$w_f = w_i + w_t \tag{1}$$

Assim, o recalque no decorrer do tempo fica expresso por:

$$w_t = w_a + w_v \tag{2}$$

Por fim, o recalque final será:

$$w_f = w_i + w_a + w_v \tag{3}$$

onde:

w_f é o recalque final;
w_i é o recalque instantâneo;
w_t é o recalque com o decorrer do tempo;
w_a é o recalque devido ao adensamento;
w_v é o recalque devido à fenômenos viscosos.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

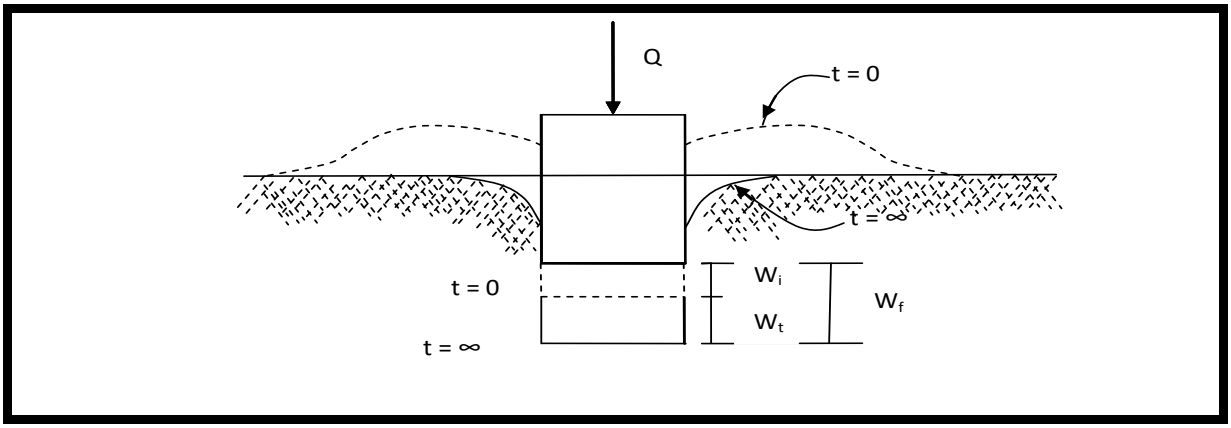

Figura 1. Recalques de uma fundação superficial sob carga vertical centrada
(Fonte: o autor)

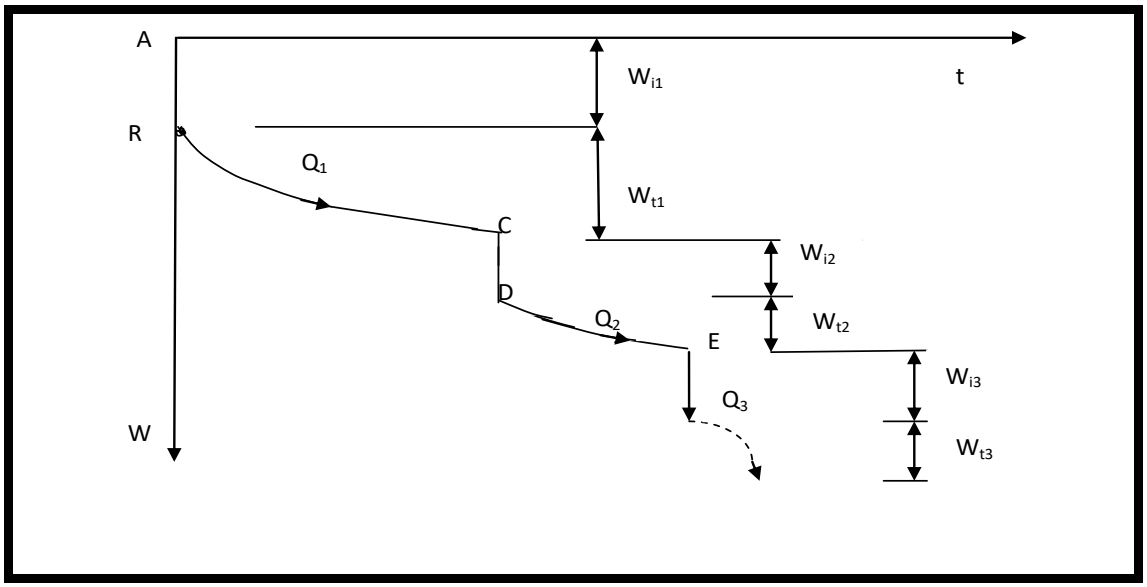

Figura 2. Evolução dos recalques w_{i1}, w_{t1}, w_{i2}, w_{t2}, w_{i3} e w_{t3} de uma fundação superficial sob o nível de cargas verticais Q_1,Q_2 e Q_3 centradas
(Fonte: o autor)

2. INTERAÇÃO SOLO-FUNDAÇÃO

É necessário considerar o papel relevante da superestrutura na análise da interação solo-fundação, pois os deslocamentos e esforços internos da superestrutura dependem dos deslocamentos da fundação, que, por sua vez, dependem dos deslocamentos do solo. Assim, a análise torna-se mais abrangente, sob a forma de interação solo-fundação ou conjunto solo-fundação-estrutura, conforme ilustrado na Figura 3.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

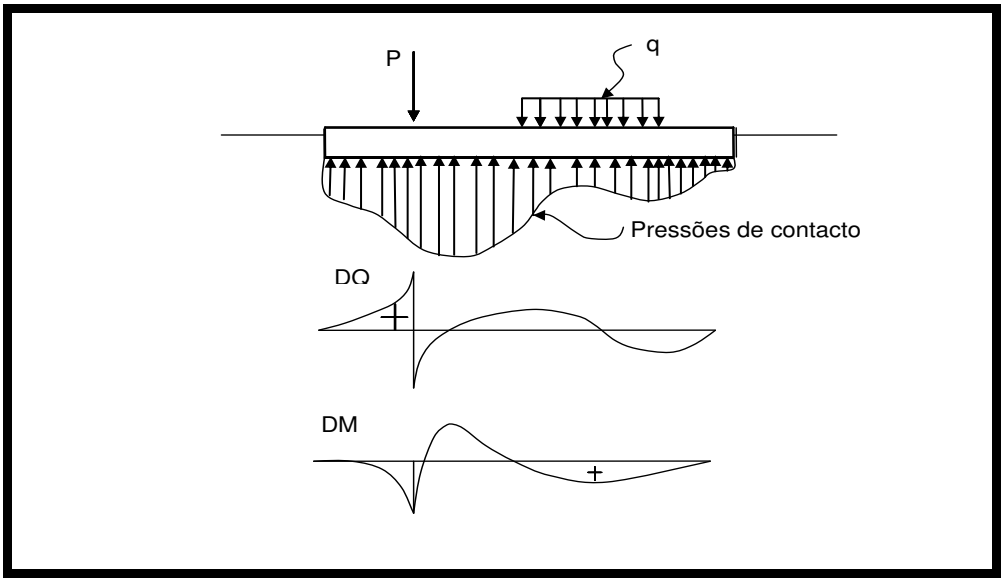

Figura 3. Pressões de contacto e esforços internos em uma fundação
(Fonte: o autor)

3. A HIPÓTESE DE WINCLER E A HIPÓTESE DO MEIO CONTÍNUO NA ANÁLISE DA INTERAÇÃO SOLO-FUNDAÇÃO

A hipótese de Wincler também pode ser denominada de modelo de molas ou modelo do fluído denso (Vesic, 1961), tal que as pressões (p) sejam proporcionais aos recalques (y). Assim:

$$p = k_v \times y \tag{4}$$

onde:

k_v = coeficiente de reação vertical, ou coeficiente de recalque, ou módulo de reação, ou coeficiente de mola;
y = recalques.

Neste modelo, conforme mostrado na Figura 4, o comportamento do solo é comparado ao comportamento de uma infinidade de molas separadas e inteiramente independentes entre si. Quando o espaçamento entre estas molas tender à zero, obtem-se um modelo semelhante ao modelo contínuo.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

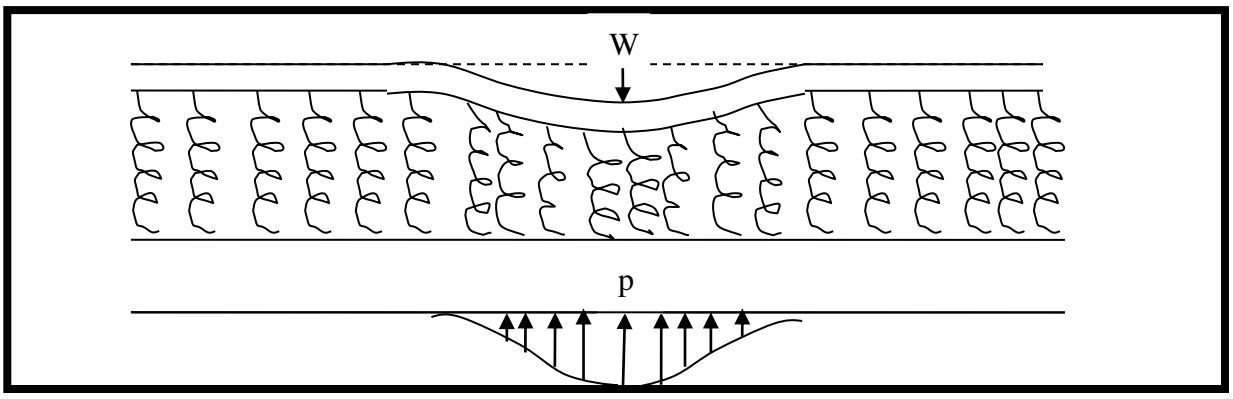

Figura 4. Modelo de molas com a Hipótese de Wincler
(Fonte: VESIC, 1973).

O meio contínuo pode ser elástico ou elasto-plástico. A teoria da elasticidade apresenta solução para o meio contínuo. Para o meio elasto-plástico se requer uma solução numérica pelo método dos elementos finitos, ou outro método que seja análogo.

4. ENSAIO DE PLACA

Utiliza-se o ensaio de placa para a obtenção do coeficiente de reação vertical k_v, agora denominado de k_{s1}, por se tratar de um ensaio realizado com uma placa quadrada (*square*) de dimensões 1" por 1". O valor de k_{s1} necessita ser corrigido para a dimensão e forma da fundação. Os resultados para k_{s1} obtidos pelo uso do ensaio de placa devem ser utilizados para os mesmos solos empregado nos ensaios. Estes valores se encontram tabelados em Velloso (2004).

5. USO DE TABELAS DE VALORES DE TÍPICOS OU CORRELAÇÕES

Valores típicos e consagrados fornecidos pela literatura também podem ser utilizados para se estimar o valor do coeficiente reação. O valores de k_v para uma placa quadrada de 1 pé quadrado (k_{s1}), conforme ilustrada na Figura 5, são fornecidos por Terzaghi (1955), e são apresentados na Tabela 1.

Aos valores do coeficiente de reação obtidos pelos ensaios de placa ou fornecidos pela literatura são necessárias algumas correções de valores de dimensão e de forma.

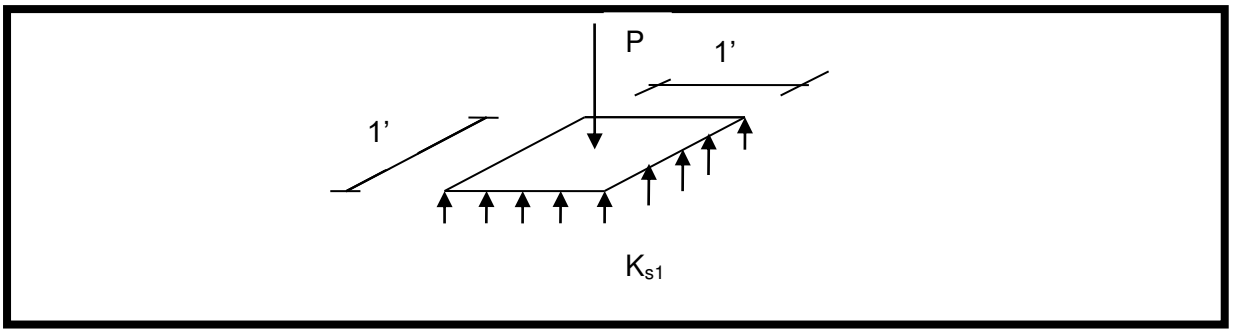

Figura 5. Placa quadrada de 1´ por 1´
(Fonte: o autor).

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Tabela 1. Valores de k_{s1} em kgf/cm^3

Argilas	**Rija**	**Muito Rija**	**Dura**
Q_u (kgf/cm^2)	1 - 2	2 – 4	>4
Faixa de valores	1,6 - 3,2	3,2 – 6,4	>6,4
valores propostos	2,4	4,8	9,6
Areias	**Fofa**	**Média Compacta**	**Compacta**
Faixa de valores	0,6 – 1,9	1,9 – 9,6	9,6 - 32
areia acima N.A	1,3	4,2	16
areia submersa	0,8	2,6	9,6

(Fonte: Terzaghi, 1955).

6. A RIGIDEZ RELATIVA SOLO-VIGA SEGUNDO HETHÉNYI, BASEADO NA HIPÓTESE DE WINCLER

Hethényi (1946) definiu a rigidez relativa solo-viga como:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k_v B}{4E_c I}} \tag{5}$$

As devidas correções de dimensão e de forma considerando-se solo-areia e solo-argila são:

- para as areias

$$k_v = k_{s1} \times \left(\frac{B'+1'}{2\times B'}\right)^2 \tag{6}$$

- para as argilas

$$k_v = k_{s1} \times \frac{1'}{B'} \times \left(\frac{\ell+0.5}{1.5\times\ell}\right) \text{ onde } \ell = \frac{L}{B} \tag{7}$$

onde:

k_v = coeficiente de reação vertical;

B = dimensão transversal da viga;

E_c = módulo de Elasticidade do material concreto da viga;

I = momento de inércia da seção transversal da viga;

L = comprimento da viga.

O objetivo da análise é a obtenção dos deslocamentos verticais, momentos fletores e esforços cortantes na viga sobre base elástica. Os parâmetros do solo não são o objetivo principal.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Apenas se utilizam como dados de entrada. Em seguida será tratado o modelo matemático para a resolução das equações diferenciais da viga sobre base elástica.

7. MÉTODOS ESTÁTICOS DE SOLUÇÃO DE VIGAS SOBRE BASE ELÁSTICA

Muitos métodos foram desenvolvidos para a solução de vigas sobre base elástica, entre eles os métodos estáticos. São importantes os baseados na Hipótese de Wincler e os métodos baseados no meio elástico contínuo. Nos métodos estáticos, a única preocupação existente é com o equilíbrio entre cargas e pressões de contato, e, para vigas mais rígidas, levam-se em consideração as hipóteses das variações lineares de pressões, conforme mostradas na Figura 6. Para vigas mais flexíveis consideram pressões uniformes nas áreas de influência dos pilares.

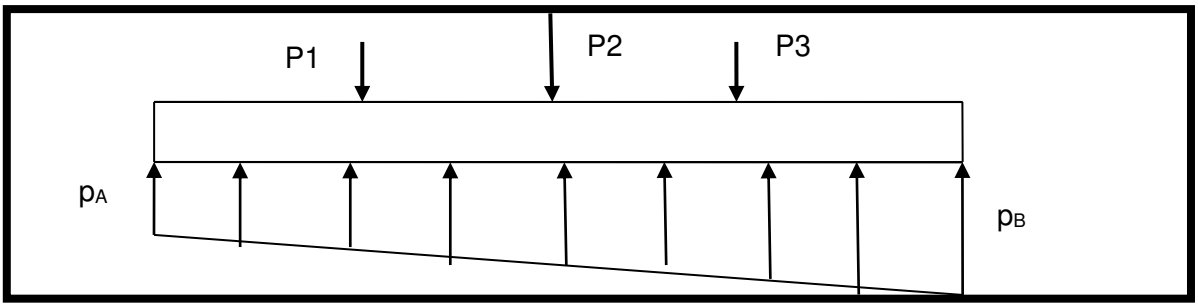

Figura 6. Hipótese da variação linear das pressões de contato
(Fonte: o autor).

8. VIGA SOBRE BASE ELÁSTICA - MÉTODO DE HETHÉNYI

A rigidez à flexão da viga e o módulo de elasticidade do terreno de fundação podem ser propriedades que variam, não apresentando valores constantes. Entretanto, os eixos longitudinais de uma viga podem ser retos ou curvos, conforme são ilustrados na Figura 7a. Da mesma forma, a natureza das cargas aplicadas podem variar como sendo axial, transversal, ou torsional, conforme ilustradas na Figura 7b.

Estas cargas estão associadas às combinações das condições de contorno (Figura 8) a que as vigas podem estar submetidas. Todos estes problemas estão intimamente relacionados pelas suas formulações matemáticas.

Muitas novas fórmulas para casos específicos de carregamento e condições de contorno foram desenvolvidas.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

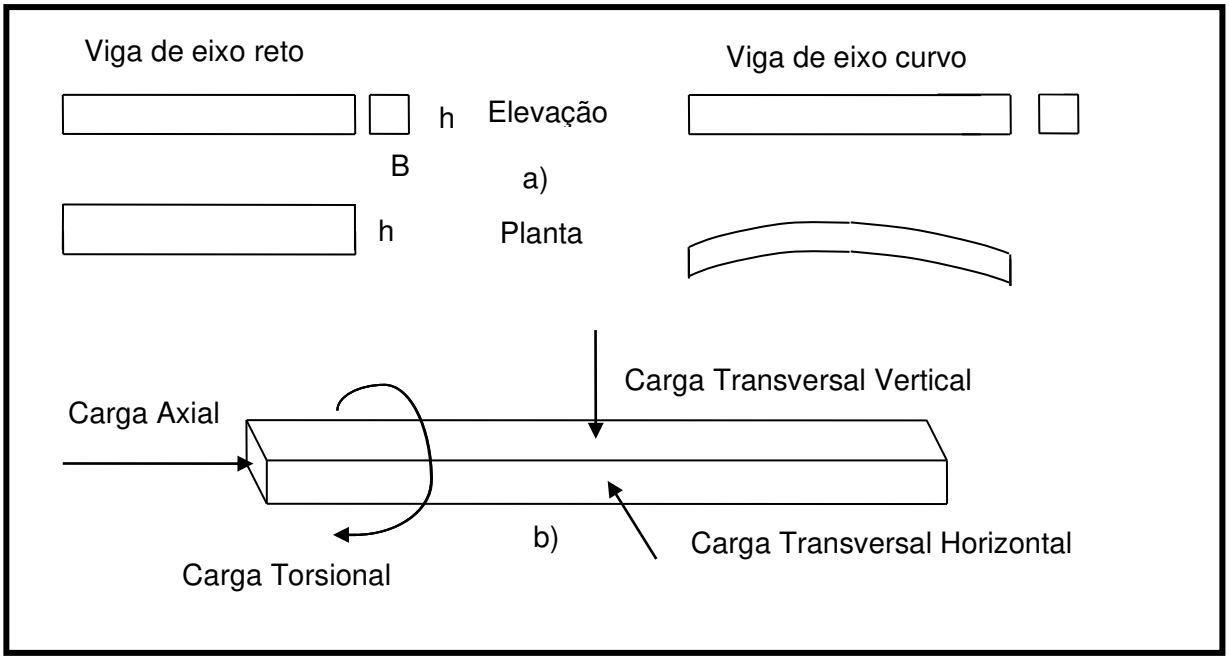

Figura 7. Eixo reto ou curvo de viga (a). Características das cargas aplicadas axiais, transversais ou torsionais (b)
(Fonte: o autor).

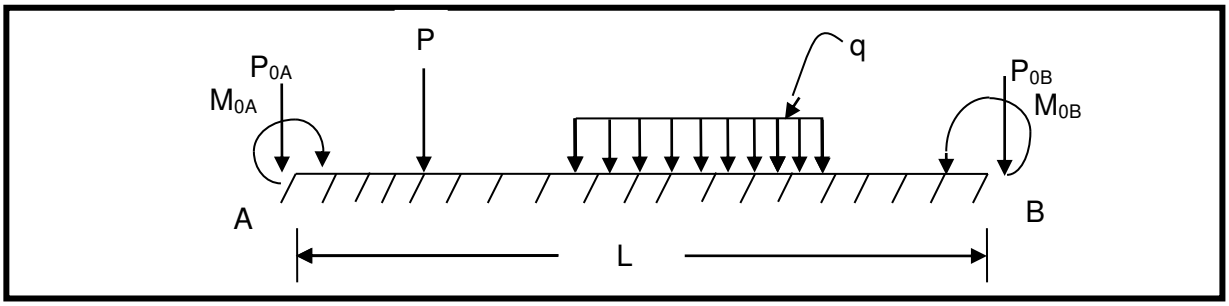

Figura 8. Forças P_{0A}, M_{0A}, P_{0B} e M_{0B} simulando as condições do contorno dos bordos extremos de uma viga de comprimento finito sob quaisquer condições de carregamento
(Fonte: o autor).

Consideram-se dois tipos básicos de fundações elásticas. O primeiro tipo é o apresentado na Figura 9a e é caracterizado pelo fato de a intensidade da pressão de reação vertical (p) em determinado ponto do terreno de fundação ser proporcional à deflexão (y), que ocorre naquele ponto. Isto é:

$$p = k\,y \tag{8}$$

Ela é independente das pressões ou deflexões produzidas ao longo dos outros pontos que não estejam alinhados na mesma vertical. Tal falta de correlação geral entre pressões e deflexão entre pontos vizinhos, implica em uma falta da continuidade do meio que comporta a fundação, como se ele fosse constituído de películas proximamente espaçadas, mas com comportamento de molas elásticas independentes.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Há um outro tipo de fundação ilustrada na Figura 9b, que é caracterizado por um maciço de sólido elástico que, em contraste com o primeiro tipo, representa o caso de continuidade total do meio portante, que é o terreno de fundação.

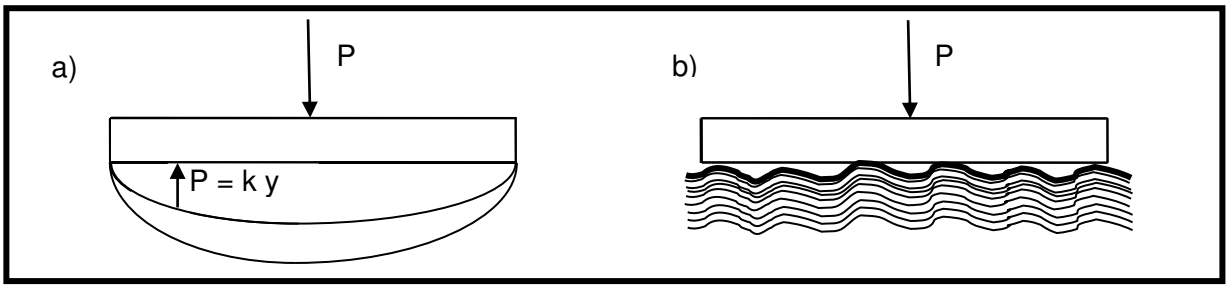

Figura 9. Modelo de solo proporcional (a) e contínuo (b)
(Fonte: o autor).

9. SOLUÇÃO GERAL DA LINHA ELÁSTICA

Considera-se que a intensidade do esforço (p) de reação da fundação em um determinado ponto é proporcional à deflexão da viga (y) no mesmo ponto considerado, analisado pela primeira vez por Wincler em 1867. Pode-se dizer:

$$p = k\,y \tag{8}$$

O solo possui propriedades físicas reais de uma natureza muito mais complexa do que aquela idealizada e representada por Wincler em 1867, e estas propriedades podem ser resumidas em uma simples relação matemática. Sob certas condições de elasticidade, os solos possuem a propriedade de propagar ondas.

Segundo a hipótese de Wincler, ele afirma que “o terreno de fundação apresenta deformações proporcionais às reações somente ao longo da mesma linha vertical abaixo do carregamento. O clássico experimento de A. Foppl’s, descrito em Poulos (1975), tem sido reconhecida como verdadeira para uma grande variedade de solos.

Apesar da sua simplicidade, a teoria de Wincler é a que pode melhor representar as condições dos solos de fundações, melhor até mesmo do que algumas teorias mais complexas e análises mais avançadas sobre o solo. Estas consideravam na mesma época, em 1934, o solo como sendo um meio elástico, isotrópico e contínuo (Terzaghi,1955).

10. EQUAÇÃO DIFERENCIAL DA LINHA ELÁSTICA

Considere-se uma viga reta apoiada sobre um meio elástico ao longo de todo o seu comprimento, e sujeita a forças verticais que agem longitudinalmente, segundo o plano principal de sua seção transversal simétrica, de acordo coma a Figura 10:

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

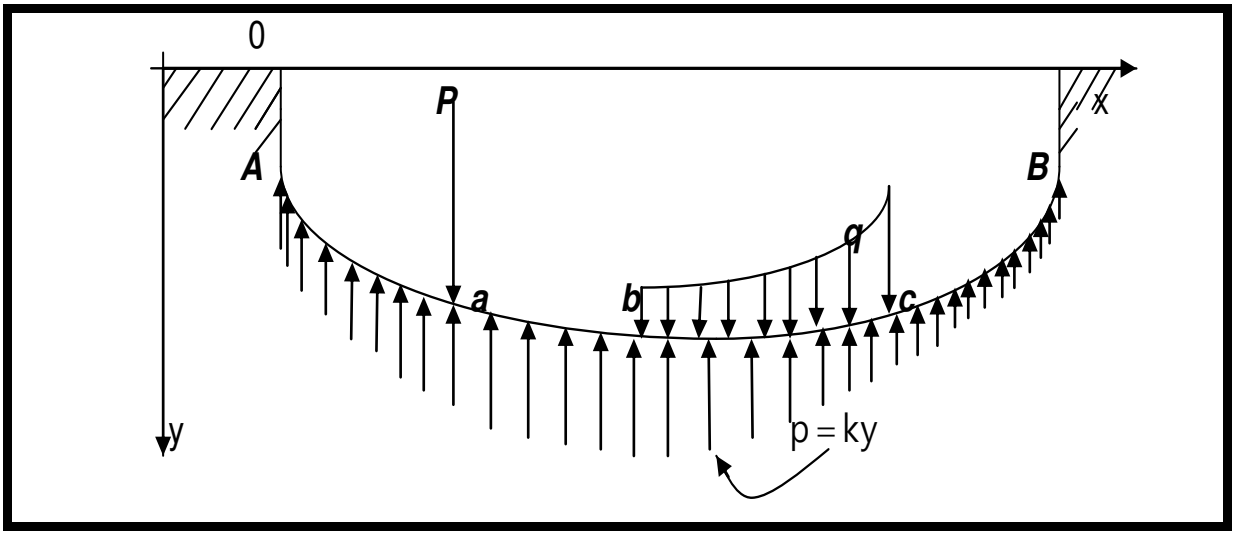

Figura 10. Viga reta apoiada sobre meio elástico sujeita a cargas verticais *P* e q
(Fonte: o autor).

A expressão

$$p = k\,y \tag{8}$$

indica que o material do terreno é elástico, e que, portanto, segue às leis de Hooke. Portanto, pode-se caracterizá-la como sendo uma força, que distribuída sobre uma unidade de área (1 x B), produz uma deflexão igual à unidade.

Considere-se um elemento infinitesimal de dimensão *dx* contido entre duas seções transversais verticais da viga, e que este elemento seja representativo da parte carregada da viga sob carga distribuída *q* (expressa em N/cm).

Na Figura 11 são mostradas as forças que atuam em tal elemento. Procedendo-se ao equilíbrio estático tem-se:

$$Q - (Q + dQ) + ky\,dx - q\,dx = 0, \tag{9}$$

onde a equação diferencial da viga sob flexão é:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M \tag{10}$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

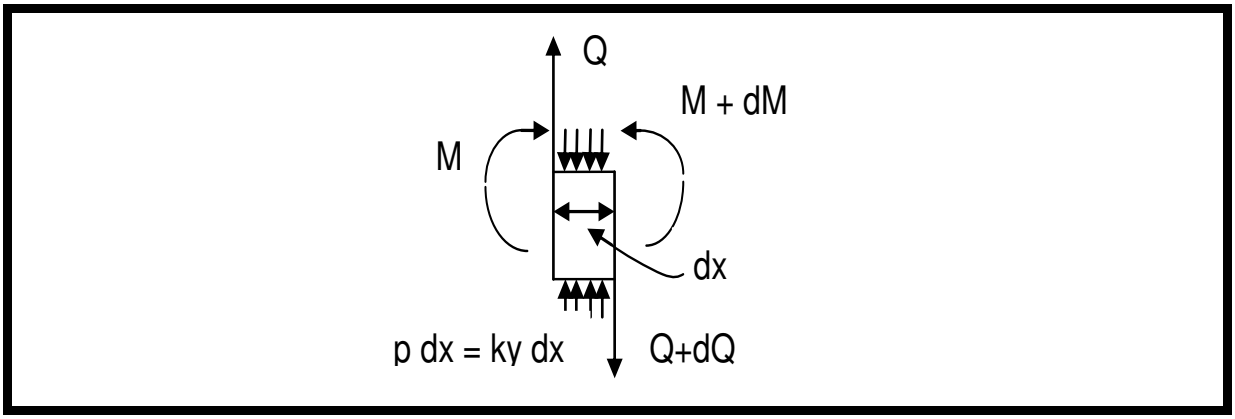

Figura 11. Elemento infinitesimal e cargas atuantes
(Fonte: o autor).

11. MÉTODO DOS CASOS PARTICULARES DE CONDIÇÕES DE APOIO NAS EXTREMIDADES NAS VIGAS LIVRES, BIENGASTADAS E BIROTULADAS

Admitindo-se que a viga possua bordos livres nas duas extremidades, tem-se que os momentos M_0 e M_L em cada extremidade são nulos e os cortantes em cada extremidade são nulos também.

$$Q_0 = 0 \text{ e } Q_L = 0) \tag{11}$$

A superposição de fórmulas obtidas para o caso de soluções de viga infinitamente longa será usada para a obtenção de fórmulas para vigas de qualquer comprimento, com qualquer tipo de carregamento e sob qualquer condição de apoio nas extremidades.

12. VIGA DE COMPRIMENTO INFINITO

As expressões de deflexões, rotações, momentos fletores e esforços cortantes para a vigas de comprimento infinito sujeitas às cargas concentradas orientadas para baixo ou para cima, são ilustradas conforme a Figura 12, e se escrevem por:

$$P_0 > 0 \text{ para baixo, x em módulo} \Rightarrow y_{dir} = y_{esq} = \frac{P_0\lambda}{2K} A_{\lambda x} \tag{12}$$

$$P_0 < 0 \text{ para cima, x em módulo} \Rightarrow y_{dir} = y_{esq} = -\frac{P_0\lambda}{2K} A_{\lambda x} \tag{13}$$

$$P_0 \text{ para baixo, x em módulo} \Rightarrow \theta_{dir} = -\frac{P_0\lambda^2}{K} B_{\lambda x} \Rightarrow \theta_{esq} = \frac{P_0\lambda^2}{K} B_{\lambda x} \tag{14}$$

$$P_0 \text{ para cima, x em módulo} \Rightarrow \theta_{dir} = \frac{P_0\lambda^2}{K} B_{\lambda x} \Rightarrow \theta_{esq} = -\frac{P_0\lambda^2}{K} B_{\lambda x} \tag{15}$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

$$P_0 \text{ para baixo, } x \text{ em módulo} \Rightarrow M_{dir} = M_{esq} = \frac{P_0}{4\lambda} C_{\lambda x} \tag{16}$$

$$P_0 \text{ para cima, } x \text{ em módulo} \Rightarrow M_{dir} = M_{esq} = -\frac{P_0}{4\lambda} C_{\lambda x} \tag{17}$$

$$P_0 \text{ para baixo, } x \text{ em módulo} \Rightarrow Q_{dir} = -\frac{P_0}{2} D_{\lambda x} \quad \text{e} \quad Q_{esq} = \frac{P_0}{2} D_{\lambda x} \tag{18}$$

$$P_0 \text{ para cima, } x \text{ em módulo} \Rightarrow Q_{dir} = \frac{P_0}{2} D_{\lambda x} \quad \text{e} \quad Q_{esq} = -\frac{P_0}{2} D_{\lambda x} \tag{19}$$

onde:

$$A_{\lambda x} = e^{-\lambda x}(\cos \lambda x + \operatorname{sen} \lambda x) \tag{20}$$

$$B_{\lambda x} = e^{-\lambda x} \operatorname{sen} \lambda x \tag{21}$$

$$C_{\lambda x} = e^{-\lambda x}(\cos \lambda x - \operatorname{sen} \lambda x) \tag{22}$$

$$D_{\lambda x} = e^{-\lambda x} \cos \lambda x \tag{23}$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

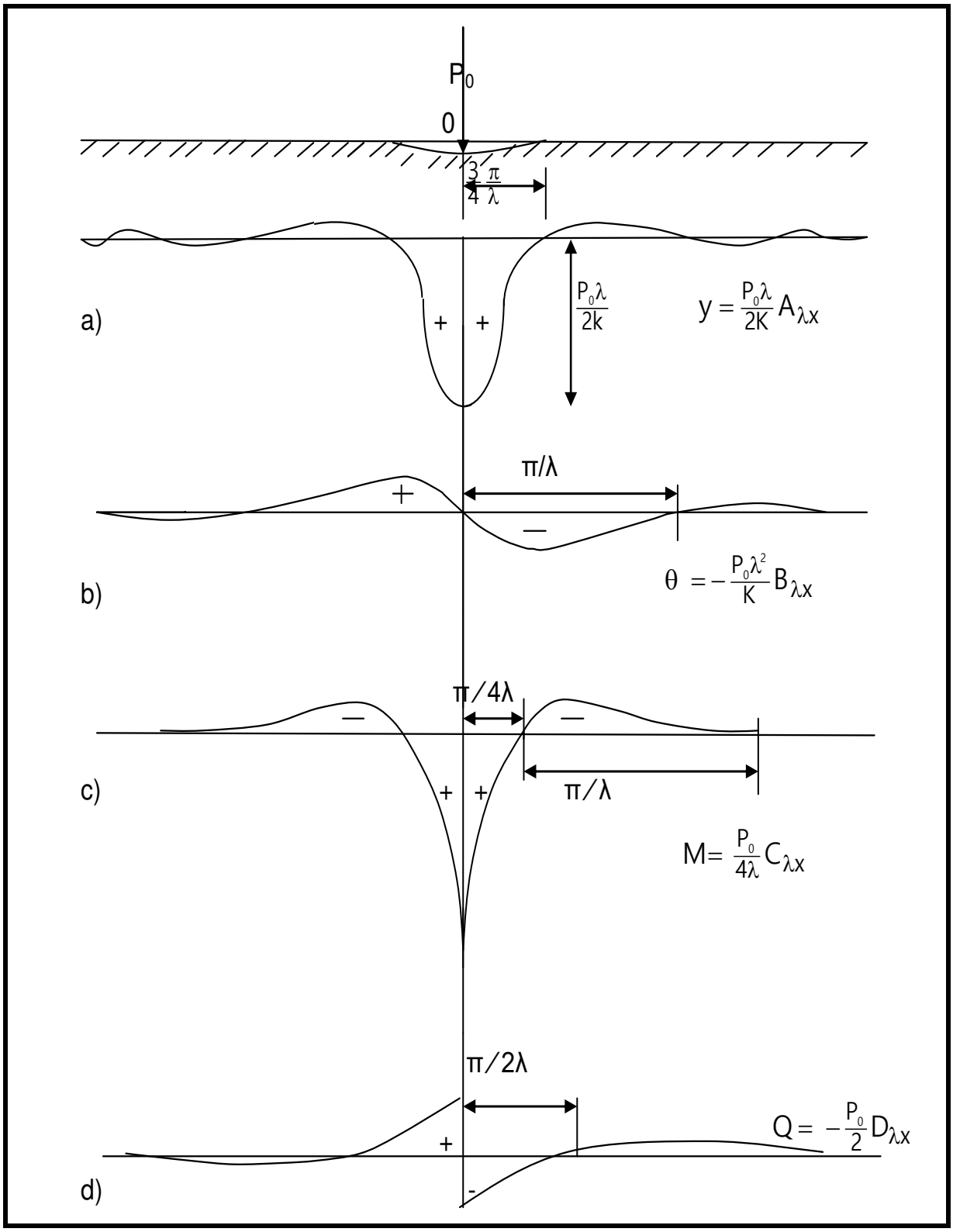

Figura 12. Diagramas esquemáticos para uma viga infinitamente longa, sujeita a carga concentrada no ponto 0 de simetria
(Fonte: o autor).

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

As expressões de deflexões, rotações com giro do relógio e contrário ao relógio, momentos fletores, esforços cortantes para a vigas de comprimento infinito sujeitas a um momento fletor concentrado, conforme ilustrados nas Figuras 13 e 14, se escrevem por:

$$\text{giro do relógio} \Rightarrow y_{direi} = \frac{M_0\lambda^2}{K} B_{\lambda|x|},\ y_{esq} = -\frac{M_0\lambda^2}{K} B_{\lambda|x|} \tag{24}$$

$$\text{contragirodorelógio} \Rightarrow y_{direi} = -\frac{M_0\lambda^2}{K} B_{\lambda|x|},\ y_{esq} = \frac{M_0\lambda^2}{K} B_{\lambda|x|} \tag{25}$$

$$\text{girodorelógio} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \theta_{dir} = \theta_{esq} = \frac{M_0\lambda^3}{K} C_{\lambda x} \tag{26}$$

$$\text{contra girodorelógio} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \theta_{dir} = \theta_{esq} = -\left(\frac{M_0\lambda^3}{K} C_{\lambda x}\right) \tag{27}$$

$$M_0 \text{ girodorelógio} \Rightarrow M_{dir} = \frac{M_0}{2} D_{\lambda|x|} \Rightarrow M_{esq} = -\frac{M_0}{2} D_{\lambda|x|} \tag{28}$$

$$M_0 \text{ girocontrárioorelógio} \Rightarrow M_{dir} = -\frac{M_0}{2} D_{\lambda|x|} \Rightarrow M_{esq} = +\frac{M_0}{2} D_{\lambda|x|} \tag{29}$$

$$M_0 \text{ girodorelógio} \Rightarrow -EI\frac{d^3}{dx^3} = Q_{dir} = Q_{esq} = -\frac{M_0\lambda}{2} A_{\lambda x} \tag{30}$$

$$M_0 \text{ girocontrariodorelógio} \Rightarrow -EI\frac{d^3}{dx^3} = Q_{dir} = Q_{esq} = \frac{M_0\lambda}{2} A_{\lambda x} \tag{31}$$

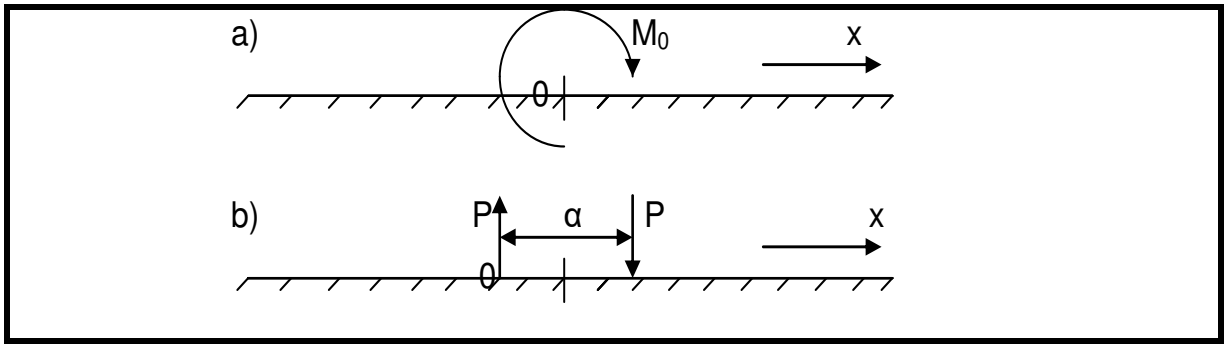

Figura 13. Momento concentrado M_0
(Fonte: o autor).

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

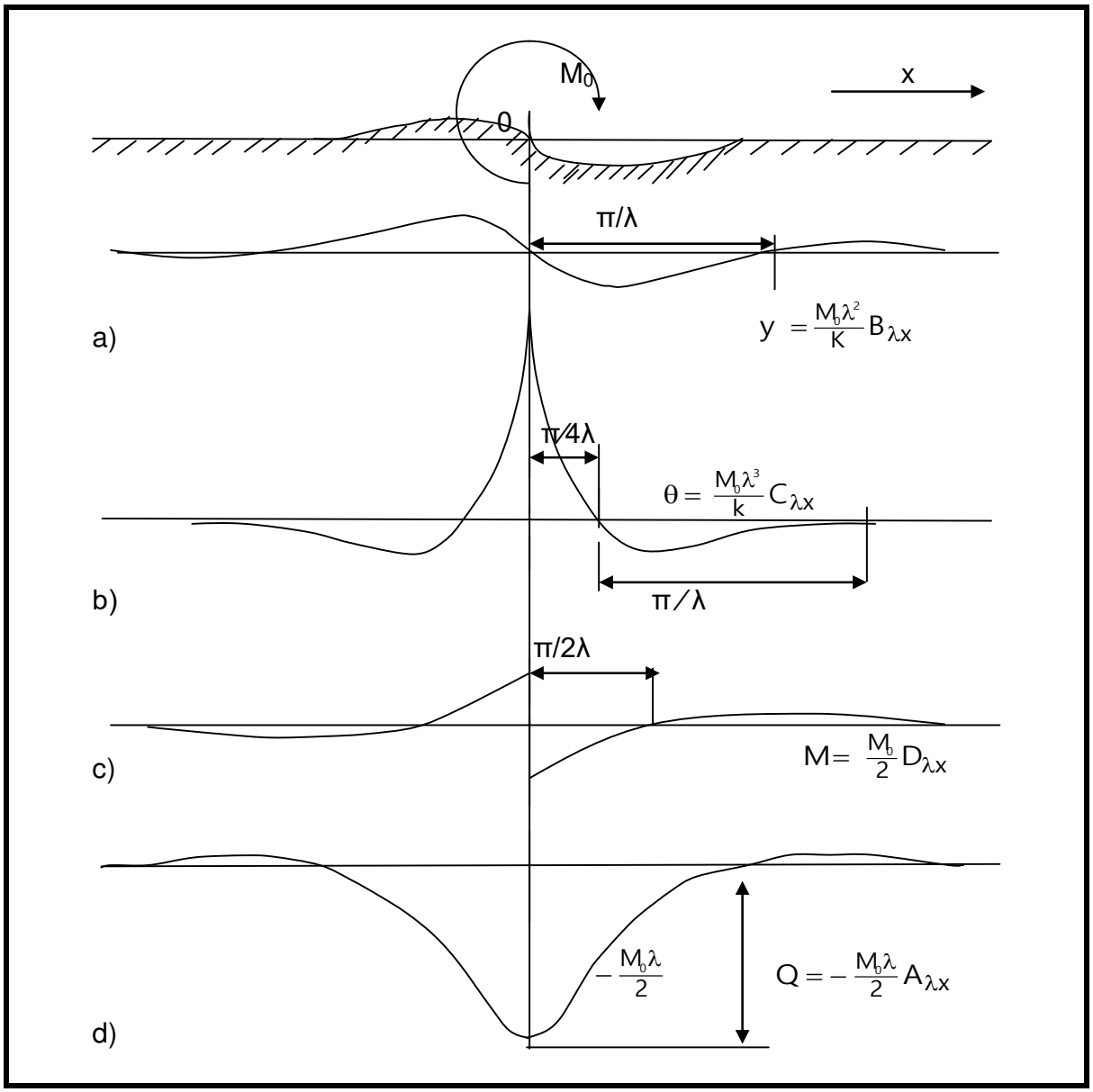

Figura 14. Diagramas esquemáticos para M_0 concentrado em uma viga de comprimento infinitamente longo
(Fonte: o autor).

O carregamento condicionante de extremidade é aquele imposto no ponto genérico A (Figura 10), que anula o momento fletor neste mesmo ponto, como também os efeitos de um outro carregamento externo atuante, de modo que esta anulação simule outras condições de contorno no ponto A.

13. VIGA DE COMPRIMENTO FINITO

Considere-se uma viga longa e infinita sujeita a um carregamento (M_A, Q_A, P, q, M_B e Q_B), conforme mostrado na Figura 15.

O equilíbrio estático exige que:

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

$$\sum M_A = 0, \sum Q_A = 0 \sum M_B = 0, \text{ e } \sum Q_B = 0 \tag{32}$$

São consideradas as contribuições de todas as cargas envolvidas.

Assim, tem-se para o ponto A:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A + \frac{P_{0A}}{4\lambda} C_{\lambda(x=0)} + \frac{P_{0B}}{4\lambda} C_{\lambda(x=L)} + \frac{M_{0A}}{2} D_{\lambda(x=0)} + \frac{M_{0B}}{2} D_{\lambda(x=L)} = 0 \qquad (13.2)$$

(33)

Analogamente à expressão (33) tem-se:

$$\sum Q_A = 0 \Rightarrow Q_A - \frac{P_{0A}}{2} D_{\lambda(x=0)} + \frac{P_{0B}}{2} D_{\lambda(x=L)} - \frac{\lambda M_{0A}}{2} A_{\lambda(x=0)} + \frac{\lambda M_{0B}}{2} A_{\lambda(x=L)} = 0, \qquad (13.3)$$

(34)

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow M_B + \frac{P_{0A}}{4\lambda} C_{\lambda(x=L)} + \frac{P_{0B}}{4\lambda} C_{\lambda(x=0)} + \frac{M_{0A}}{2} D_{\lambda(x=L)} + \frac{M_{0B}}{2} D_{\lambda(x=0)} = 0 \qquad (13.4)$$

(35)

$$\sum Q_B = 0 \Rightarrow Q_B - \frac{P_{0A}}{2} D_{\lambda(x=L)} + \frac{P_{0B}}{2} D_{\lambda(x=0)} - \frac{\lambda M_{0A}}{2} A_{\lambda(x=L)} + \frac{\lambda M_{0B}}{2} A_{\lambda(x=0)} = 0, \qquad (13.5)$$

(36)

Solucionando-se o sistema composto pelas expressões (33), (34), (35) e (36) pode-se obter os valores das cargas condicionantes de extremidade P_{OA}, P_{OB}, M_{OA}, M_{OB} para extremidades livres.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

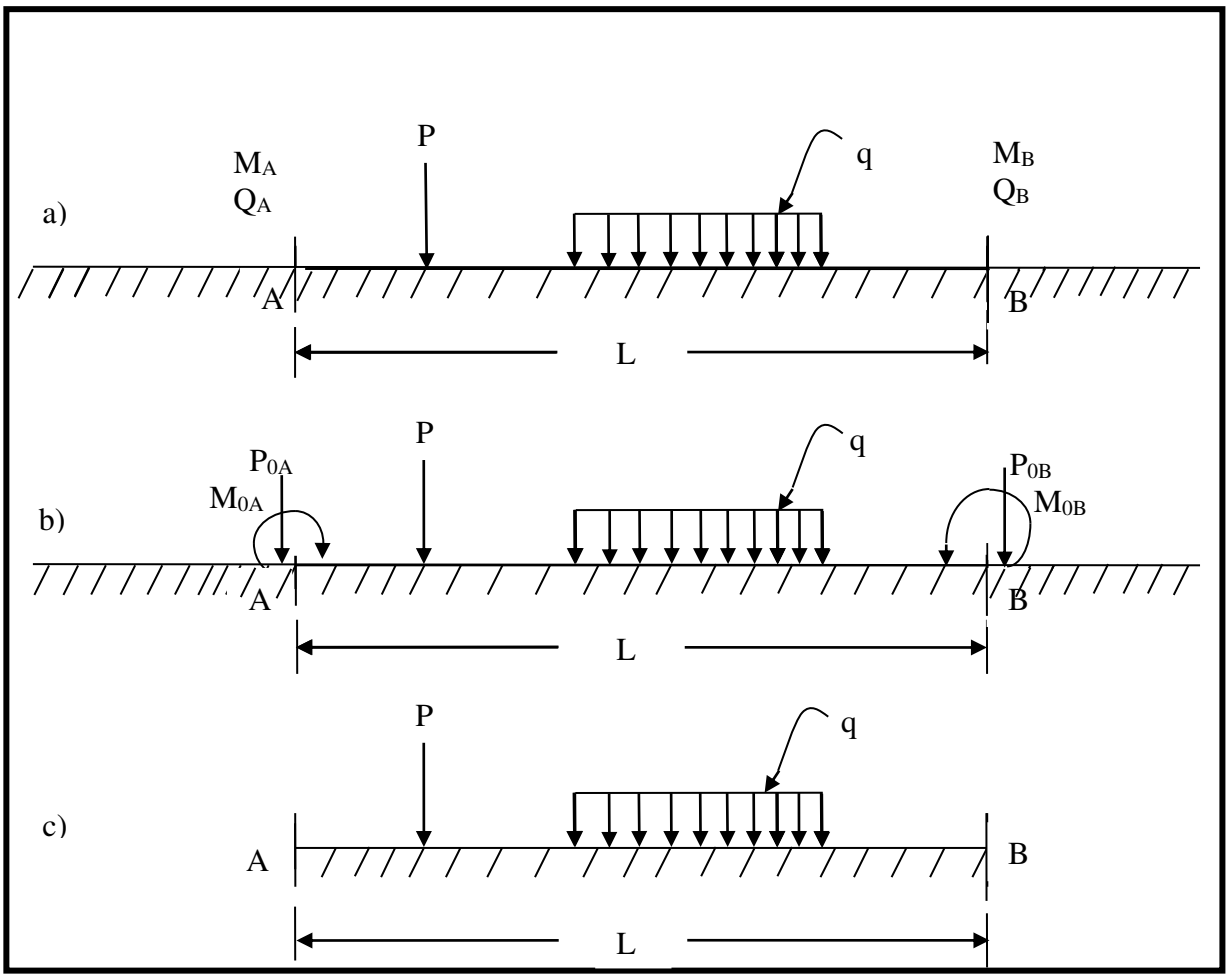

Figura 15. Etapas de transformação da viga de comprimento infinito (a) para a viga de comprimento finito de extremidades livres (c), pela anulação dos esforços de extremidade
(Fonte: o autor).

14. ANÁLISE DE UMA VIGA FINITA DE EXTREMIDADES LIVRES

Seja a viga finita mostrada na Figura 16, onde são determinados os diagramas dos deslocamentos verticais, das tensões de contato, dos momentos fletores e dos esforços cortantes. Adotam-se a altura de viga h como sendo de 0,4m, e o comprimento da viga como sendo 10m.

Serão feitas as análises utilizando-se as seguintes razões:

$$(h/B) = 1/2 \quad (37)$$

$$(h/B) = 3/4 \quad (38)$$

$$(h/B) = 6/6 \quad (39)$$

$$(h/B) = 5/4, \quad (40)$$

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

$$(h/B) = 3/2 \tag{41}$$

$$(h/B) = 7/4 \tag{42}$$

São dados de entrada do programa em Computação Algébrica Simbólica de análise:

$$E = 27000\,MPa = 27 \times 10^9 \ \frac{N}{M^2}$$

$$B = 1.5\ m$$

$$k_{s1} = 4.2 \ \frac{kgf}{cm^3}$$

São utilizadas também as expressões:

$$k_v = k_{s1} \times \left(\frac{B + 1'}{2 \times B} \right)^2 \tag{43}$$

$$k = k_v \times B \tag{44}$$

$$I = \frac{B \times h^3}{12} \tag{45}$$

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{k}{4EI}} \tag{46}$$

onde:

h = altura de viga;

B = largura da seção transversal da viga;

E = módulo de elasticidade longitudinal da viga;

λ = rigidez relativa solo-viga;

k_{s1} = coeficiente de recalque de Terzaghi considerando-se uma placa quadrada de 1' por 1' para areia medianamente compacta seca;

k_v = coeficiente de recalque que depende das dimensões e da forma da fundação;

k = coeficiente de recalque incluindo a largura B da viga;

I = momento de inércia à flexão da seção transversal da viga.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

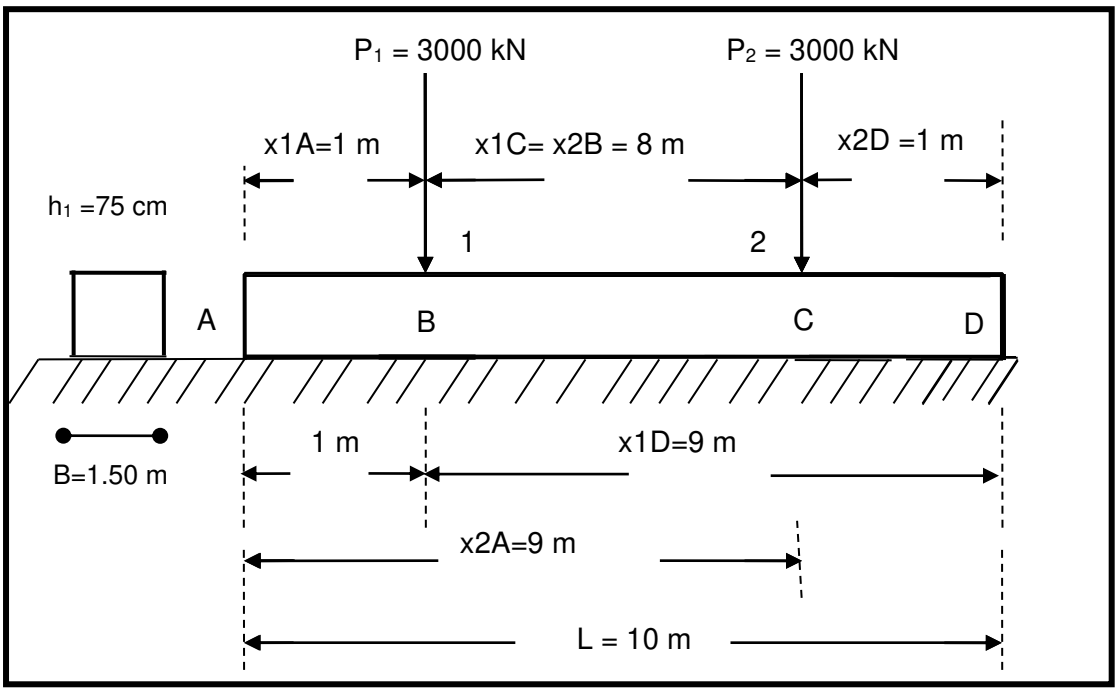

Figura 16. Viga finita sobre base elástica sujeita a duas cargas concentradas Iguais
(Fonte: o autor).

São consideradas 3 etapas de cálculo (Bowles, 1974):

-Cálculo dos esforços M_A, Q_A, M_B e Q_B para viga infinita.
-Cálculo dos carregamentos condicionantes de extremidade P_{0Aj}, M_{0Aj}, P_{0Dj} e M_{0Dj}
-Cálculo dos deslocamentos e dos esforços introduzindo-se na viga infinita os carregamentos condicionantes de extremidade, além dos carregamentos externos já existentes.

Estes deslocamentos e esforços finais assim calculados, são os deslocamentos e esforços para a viga finita.

São adotados para os carregamentos externos:

P_1 = 3000 kN;
P_2 = 3000 kN;
L = 10 m.

Na segunda etapa são feitos os cálculos dos carregamentos condicionantes de extremidade P_{0Aj}, M_{0Aj},P_{0Dj} e M_{0Dj},

onde:

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

P_{0Aj} = carregamento condicionante de carga concentrada na extremidade A, considerando a viga com altura j;

M_{0Aj} = carregamento condicionante de momento concentrado na extremidade A, considerando a viga com altura j.

Na terceira etapa são feitos os cálculos dos deslocamentos e dos esforços introduzindo-se na viga infinita os carregamentos condicionantes de extremidades, além dos carregamentos externos já existentes.

Estes deslocamentos e esforços finais assim calculados são os deslocamentos e esforços para a viga finita.

São apresentados de acordo com as Figura 17 18 e 19 os diagramas de flechas (deslocamentos), momentos fletores e esforços cortantes, respectivamente, na viga sobre a base elástica.

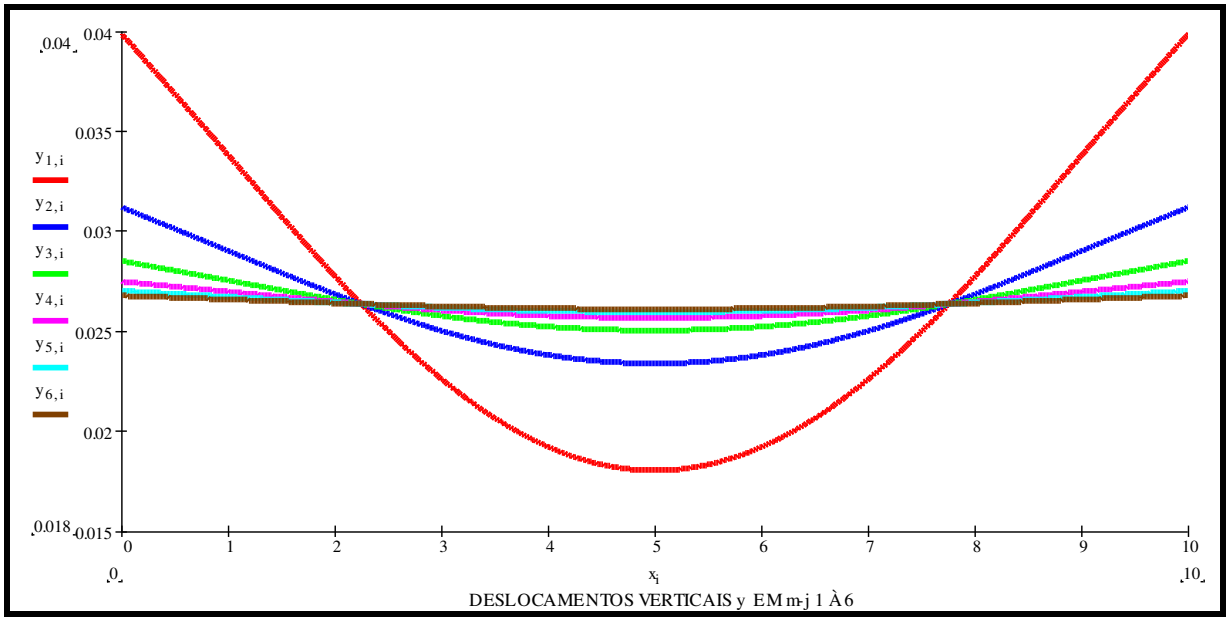

Figura 17. Deslocamentos verticais em metros despertados viga

(Fonte: o autor).

Observa-se no diagrama de flechas da Figura 17, referente à estrutura da Figura 16, que, sendo as cargas concentradas locadas nas posições próximas às extremidades, a ocorrência de flechas maiores se deu para vigas dotadas de alturas menores, para as mesmas larguras de vigas.

Inversamente ao observado, para grandes alturas de vigas, as flechas nas extremidades são menores em virtude do aumento da rigidez.

O ponto de nulidade das flechas se mantem na mesma posição quando se aumenta a altura de viga.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

Observa-se nos diagramas de momentos fletores na Figura 18, referente à estrutura da Figura 16, um comportamento similar ao de vigas biapoiadas, uma vez que as cargas concentradas na viga sobre base elástica se localizam exatamente nos pontos de apoio, caso a viga fosse biapoiada.

Ocorre uma inversão nas tensões no que se refere às fibras tracionadas e comprimidas, onde o solo age como se ele próprio fosse o carregamento uniformemente distribuído. Tais analogias se observam nos diagramas de esforços cortantes da Figura 19, onde há descontinuidade nos pontos de aplicação de cargas concentradas.

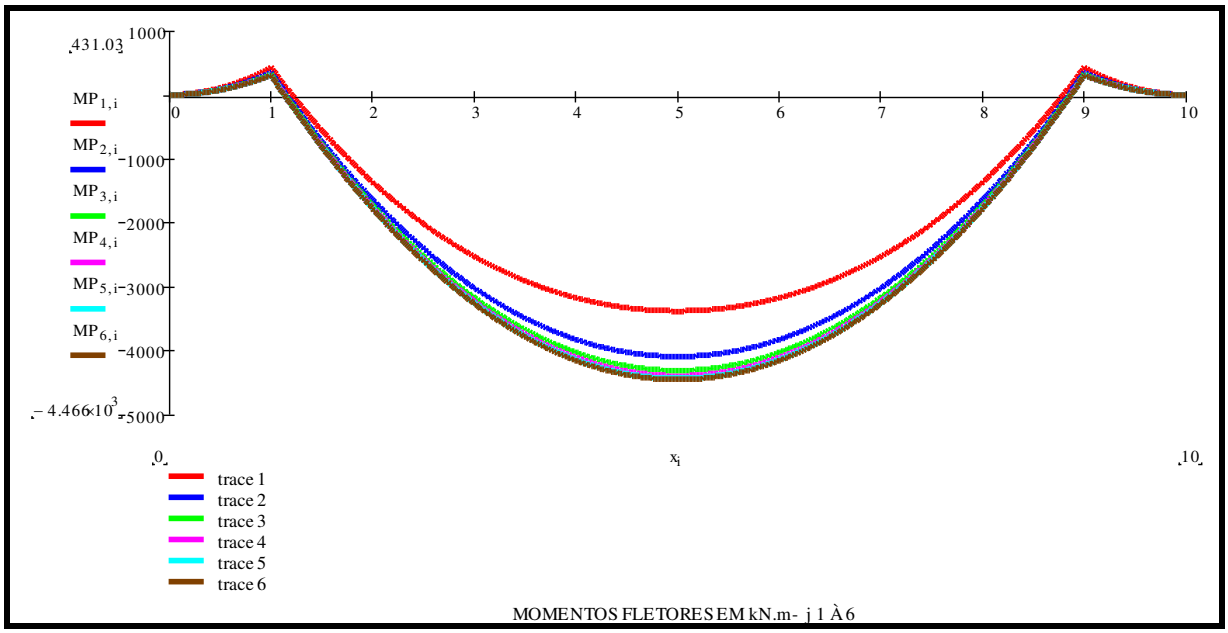

Figura 18. Momentos fletores na viga

(Fonte: o autor).

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

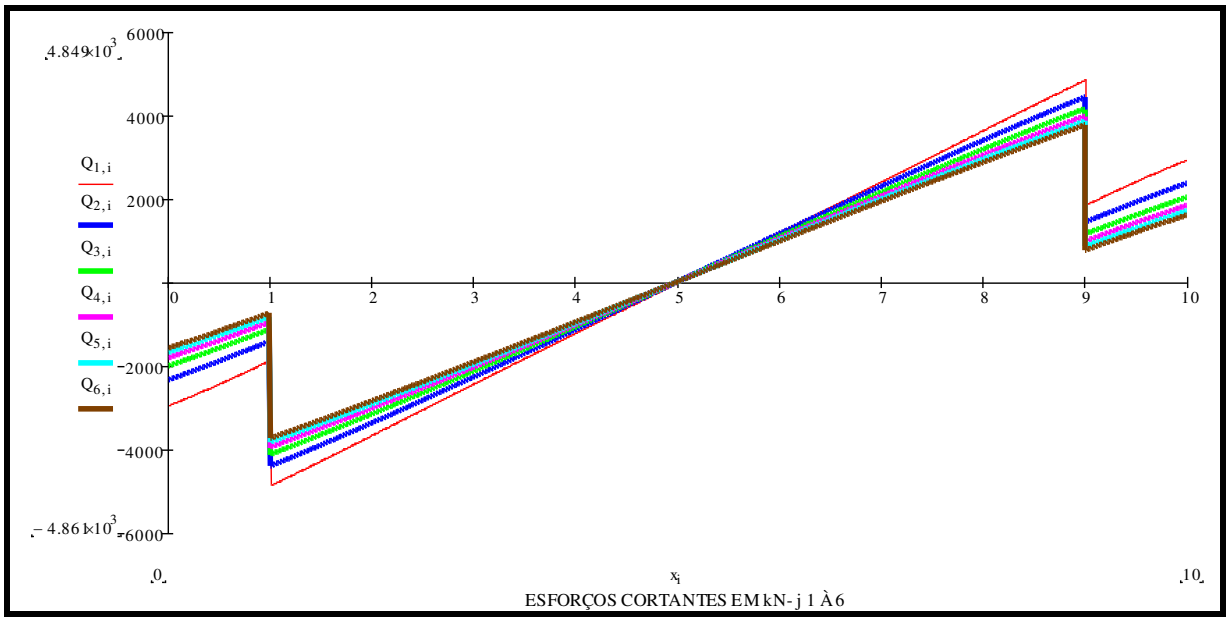

Figura 19. Esforços cortantes na viga

(Fonte: o autor).

15. ANÁLISE COMPARATIVA ENTRE A ALTURA E A REAÇÃO VERTICAL DO TERRENO PARA AREIAS E ARGILAS

São analisados nas Figuras 20 e 21 os comportamentos das rigidezes relativas dos solos-fundação de areia e de argila para uma largura de viga B constante.

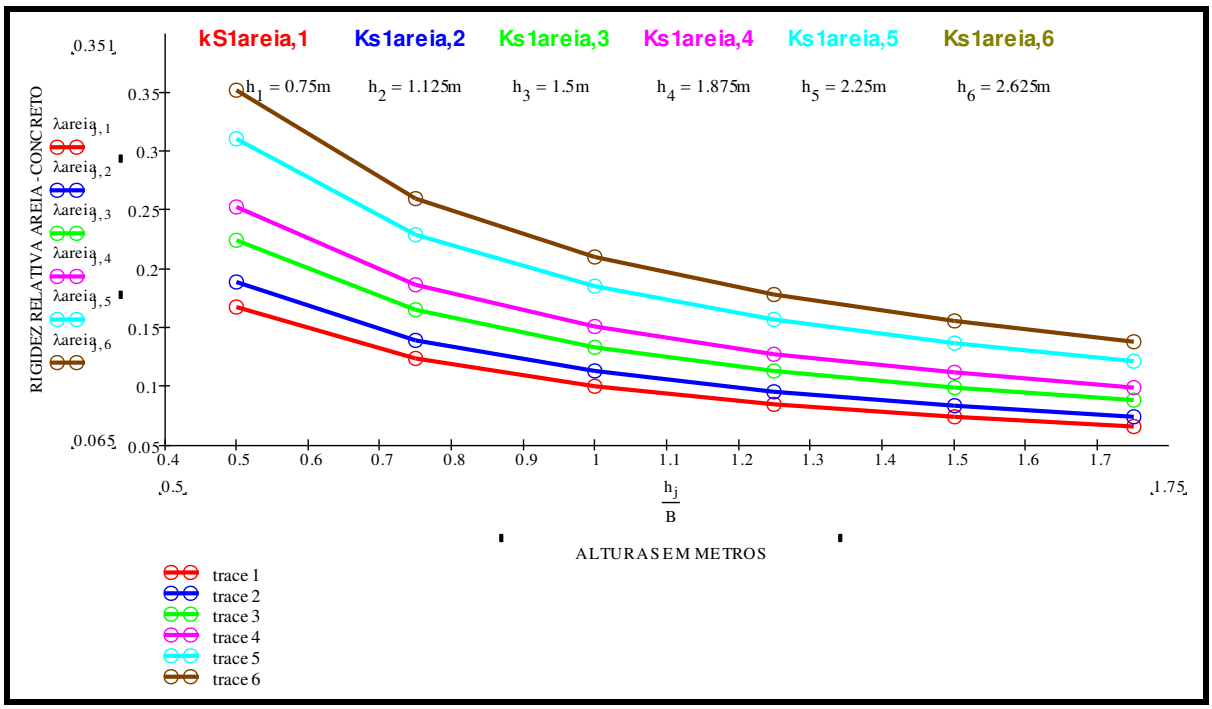

Figura 20. Altura h versus rigidez relativa para solo-fundação de areia

(Fonte: o autor).

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

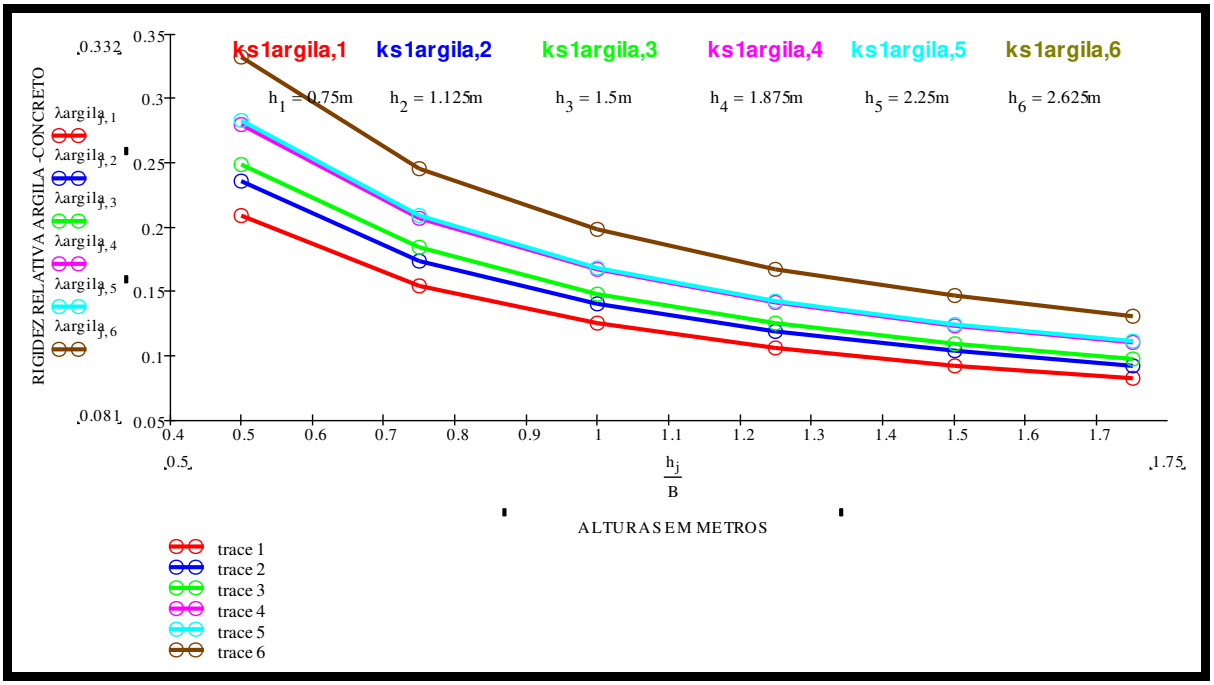

Figura 21. Altura h versus a rigidez relativa para solo-fundação de argila

(Fonte: o autor).

Observa-se que, sendo a largura da viga B constante, com o crescimento da altura h da seção transversal da viga, ocorre um decréscimo assintótico da rigidez relativa solo-fundação λ.

Com o aumento do coeficiente de reação vertical k_{s1} de areia fofa para areia medianamente compacta, e de medianamente compacta para areia compacta, observa-se um aumento da rigidez relativa do solo-fundação caracterizada por λ. Analogamente, este aumento de rigidez λ se observa no comportamento das areias, assim como também no comportamento da argilas.

16. CONSIDERAÇÕES

A análise desenvolvida empresta um valor original no que se refere à obtenção de dados que auxiliam no dimensionamento de vigas sobre bases elásticas.

Os diversos diagramas de esforços obtidos contribuem para uma análise global do comportamento estrutural destas vigas, possibilitando um melhor dimensionamento estrutural, com economia de aço e uma visão melhor da distribuição das armaduras.

A contribuição se torna mais evidente quando se varia o tipo de solo sob o qual a viga está disposta, considerando-se que há diversos tipos de solos arenosos e argilosos. Deve-se ter o cuidado de utilizar os parâmetros específicos para cada tipo de solo.

Desta maneira, percebe-se que a pesquisa possibilita uma obtenção de dados abrangentes que tornam os projetos de vigas sobre base elástica perfeitamente otimizados, levando-se a valores de resultados bem precisos, com acentuada economia de aço, uma vez que já são conhecidos valores exatos dos esforços solicitantes.

RECIMA21 - REVISTA CIENTÍFICA MULTIDISCIPLINAR
ISSN 2675-6218

REFERÊNCIAS

BOWLES, J. E. **Analytical and computer methods in foundation engineering**. New York: McGraw-Hill, 1974.

BOWLES, J. E. **Foundation analysis and design**. 4. ed. New York: McGraw-Hill, 1988.

HETHÉNYI, M. **Beams on elastic foundation**. Michigan: University of Michigan Press, 1946.

MEYERHOF, G. G. Some recent foundation research and its application to design. **Structural engineer**, v. 31, p. 151-167, 1953.

POULOS, H. G. Settlement. Analysis of structural foundation systems. *In:* South-east Asian Conference on Soil Engineering. **Proceedings: SEACSE**, Kuala Lumpur, v. 4. p. 52-62, 1975.

TERZAGHI, K, Evaluation of coefficient of subgrade reaction. **Geotechnique**, v. 5, n. 4, p. 297-326, 1955.

VELLOSO, D. A.; LOPES, F. R. **Fundações**. São Paulo: Atlas, 2004. v. 1,

VESIC, A. S. Beams on elastic subgrade and Wincler's Hypothesis. *In:* **International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering**, Paris: ICSMFE, 1961.

VESIC, A. S. Slabs on Elastic Subgrade and Wincler's Hypothesis. *In:* **International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering**. Moscow: ICSMFE, 1973

WEISSMANN, G. F.; WHITE, S. R. Small Angular deflections of rigid foundations. **Geotechnique**, v. 11, n. 3, p. 186-202, 1961.