REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

SIMULAÇÕES COMPUTACIONAIS UTILIZANDO *SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS* PARA A BUSCA DE MÍNIMOS DE FUNÇÕES

COMPUTATIONAL SIMULATIONS USING SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS FOR FUNCTION MINIMIZATION

SIMULACIONES COMPUTACIONALES UTILIZANDO SMOOTHED PARTICLE HYDRODYNAMICS PARA LA BÚSQUEDA DE MÍNIMOS DE FUNCIONES

Igor Ferreira Tavares[1], Tiago Alessandro Espínola Ferreira[2]

e6127119
https://doi.org/10.47820/recima21.v6i12.7119

PUBLICADO: 12/2025

RESUMO

A Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas, ou do inglês *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), é um procedimento computacional usado para simulações em meios contínuos, como processos mecânicos e fluxos de fluidos, ganhando crescente destaque na representação da dinâmica de fluidos. Dado um sistema físico composto por partículas, o SPH calcula a pressão sobre cada partícula, considerando as interações com suas partículas vizinhas, simulando a dinâmica do sistema como um fluido. A proposta deste trabalho é utilizar a técnica SPH para a busca por mínimos de funções, simulando a queda, por gravidade, de um conjunto de partículas sob uma superfície. Esta superfície é representada por uma função matemática cujo mínimo global se deseja encontrar. O uso do SPH, tradicionalmente aplicado em simulações físicas e industriais, é aqui explorado como prova de conceito, demonstrando que a técnica também pode ser adaptada para problemas de otimização. Com a dinâmica de escoamento das partículas sob a superfície em análise é possível identificar a partícula que alcança o valor de mínimo, localizando o ponto de mínimo no domínio da função. Foram realizados diversos experimentos com funções que possuem múltiplos mínimos locais e um mínimo global, e os resultados mostraram que o SPH é capaz de identificar esse mínimo com precisão. Para comparação, também foram realizados testes com a técnica PSO (*Particle Swarm Optimization*). Os resultados demonstram que o desempenho do SPH é comparável ao do PSO.

PALAVRAS-CHAVE: Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas. Problemas de otimização. Simulação computacional.

ABSTRACT

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH) *is a computational procedure used for simulations in continuous media, such as mechanical processes and fluid flows, and has gained increasing relevance in the representation of fluid dynamics. Given a physical system composed of particles,* SPH *computes the pressure acting on each particle by considering interactions with neighboring particles, simulating the system dynamics as a fluid. The purpose of this work is to apply the* SPH *technique to the minimization of mathematical functions by simulating the gravitational descent of a set of particles over a surface. This surface is represented by a mathematical function whose global minimum is to be determined. The use of* SPH*, traditionally applied in physical and industrial*

[1] Mestre em Informática Aplicada pela Universidade Federal Rural de Pernambuco. Especialização em Ensino da Matemática pelo Instituto Federal de Pernambuco. Licenciatura em Matemática pela Faculdade de Ciências Humanas e Sociais de Igarassu.

[2] Graduação, Bacharelado e Mestrado em Física pelo Departamento de Física da Universidade Federal de Pernambuco. Doutorado em Física pela Universidade de São Paulo. Doutorado em Ciências da Computação pela Universidade Federal de Pernambuco. Pós-doutorado pela Harvard University. Professor Titular da Universidade Federal Rural de Pernambuco.

Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

simulations, is explored here as a proof of concept, demonstrating that the technique can also be adapted to optimization problems. Through the particle flow dynamics over the analyzed surface, it is possible to identify the particle that reaches the minimum value, locating the minimum point within the function domain. Several experiments were conducted using functions with multiple local minimums and a single global minimum, and the results showed that SPH *is able to identify this minimum with good accuracy. For comparison purposes, tests were also performed using the Particle Swarm Optimization* (PSO) *technique. The results demonstrate that the performance of* SPH *is comparable to that of* PSO*.*

KEYWORDS: *Smoothed Particle Hydrodynamics. Optimization problems. Computational simulation*.

RESUMEN
El método de Hidrodinámica de Partículas Suavizadas, o Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH), es un procedimiento computacional utilizado en simulaciones de medios continuos, como procesos mecánicos y flujos de fluidos, y ha ganado creciente relevancia en la representación de la dinámica de fluidos. Dado un sistema físico compuesto por partículas, el SPH calcula la presión que actúa sobre cada partícula considerando las interacciones con sus partículas vecinas, simulando la dinámica del sistema como un fluido. La propuesta de este trabajo es utilizar la técnica SPH para la búsqueda de mínimos de funciones matemáticas, simulando el descenso gravitacional de un conjunto de partículas sobre una superficie. Esta superficie está representada por una función matemática cuyo mínimo global se desea encontrar. El uso del SPH, tradicionalmente aplicado en simulaciones físicas e industriales, se explora aquí como una prueba de concepto, demostrando que la técnica también puede adaptarse a problemas de optimización. A través de la dinámica de flujo de las partículas sobre la superficie analizada, es posible identificar la partícula que alcanza el valor mínimo, localizando el punto de mínimo en el dominio de la función. Se realizaron varios experimentos con funciones que presentan múltiples mínimos locales y un mínimo global, y los resultados mostraron que el SPH es capaz de identificar dicho mínimo con buena precisión. Para fines de comparación, también se realizaron pruebas con la técnica de Particle Swarm Optimization (PSO). Los resultados demuestran que el desempeño del SPH es comparable al del PSO.

PALABRAS CLAVE: *Hidrodinámica de Partículas Suavizadas. Problemas de optimización. Simulación computacional.*

1. INTRODUÇÃO

O problema de encontrar o mínimo de uma função matemática é central em diversas áreas da ciência e da engenharia, estando diretamente relacionado à otimização de processos e sistemas. Esse tipo de problema é amplamente aplicado, por exemplo, no treinamento de redes neurais, no qual se busca minimizar a função de erro a fim de aumentar a precisão dos modelos. De modo geral, a tarefa consiste em identificar pontos do domínio onde a função assume seus menores valores, o que se torna particularmente desafiador quando há múltiplos mínimos locais.

Nesse contexto, métodos computacionais inspirados em fenômenos físicos têm se mostrado alternativas promissoras para a resolução de problemas de otimização. Entre eles, destaca-se a Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas (*Smoothed Particle Hydrodynamics* – SPH), um método numérico sem malha, baseado em partículas, originalmente desenvolvido para simulações físicas. A analogia entre o comportamento de um fluido sob ação da gravidade e a

Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

busca por mínimos de uma superfície matemática permite modelar o processo de otimização de forma intuitiva, em que as partículas tendem a se acumular nos pontos de menor energia potencial.

Problema da Pesquisa

Considerando uma superfície sólida descrita por uma função matemática e submetida a um campo gravitacional, espera-se que um fluido lançado sobre essa superfície escoe e se acumule nas regiões de menor profundidade. A partir dessa analogia, formula-se o seguinte problema de pesquisa: é possível utilizar a técnica de SPH para simular o escoamento de partículas sobre superfícies matemáticas e, a partir dessa dinâmica, identificar o mínimo global da função que descreve essa superfície?

Objetivos

Objetivo Geral

Investigar o uso da metodologia de Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas (*Smoothed Particle Hydrodynamics* – SPH) como abordagem computacional para a identificação de mínimos de funções matemáticas.

Objetivos Específicos

1. Analisar o uso da técnica SPH como ferramenta para a busca de mínimos de funções matemáticas;
2. Aplicar o método SPH em funções de *benchmark* que apresentam múltiplos mínimos locais e um mínimo global;
3. Desenvolver simulações computacionais que permitam identificar os pontos de mínimo por meio da dinâmica das partículas;
4. Comparar os resultados obtidos com o método SPH com os resultados de um método clássico de otimização baseado em partículas, como o *Particle Swarm Optimization* (PSO).

Justificativa

A identificação de mínimos de funções torna-se um problema computacional complexo em cenários nos quais não se dispõe da expressão analítica da função ou de suas derivadas. Métodos tradicionais baseados em cálculo diferencial podem apresentar limitações nessas situações. Dessa forma, justifica-se a adoção de uma abordagem numérica sem malha e livre do cálculo direto de derivadas, como o método SPH, que utiliza apenas a interação entre partículas

Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

para modelar a dinâmica do sistema. Além disso, a aplicação do SPH em problemas de otimização amplia o campo de uso dessa técnica, tradicionalmente restrita à simulação física, contribuindo para o desenvolvimento de novas estratégias computacionais para problemas de otimização global.

2. REFERENCIAL TEÓRICO

Smoothed Particle Hydrodynamics (SPH)

O método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) é uma técnica numérica Lagrangiana e sem malha, originalmente proposta por Lucy (1977) e por Gingold e Monaghan (1977), na qual o domínio contínuo é representado por um conjunto discreto de partículas que transportam propriedades físicas. No SPH, uma variável de campo é aproximada por uma convolução com uma função kernel de suavização, conforme apresentado na Equação (1).

$$\rho(x_i) = \sum_j m_j W(x_i - x_j, h) \tag{1}$$

A discretização do domínio contínuo em partículas permite reescrever a interpolação integral na forma de uma soma ponderada sobre as partículas vizinhas, resultando na formulação discreta do método, apresentada na Equação (2). Essa etapa estabelece a base computacional do SPH, viabilizando sua aplicação em simulações numéricas.

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho\nabla \cdot u \tag{2}$$

A densidade do fluido é calculada diretamente a partir da contribuição das partículas vizinhas, sendo expressa pela Equação (3). Essa formulação constitui um dos pilares do método SPH e é fundamental para a determinação das demais grandezas físicas envolvidas na simulação.

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + v\nabla^2 u + g \tag{3}$$

A Hidrodinâmica de Partículas Suavizadas (*Smoothed Particle Hydrodynamics* – SPH) é um método numérico Lagrangiano, sem malha, originalmente proposto por Lucy (1977) e por Gingold e Monaghan (1977) para aplicações em astrofísica. Desde então, o SPH tem sido amplamente empregado na simulação de fenômenos envolvendo mecânica dos fluidos e meios contínuos, destacando-se por sua capacidade de lidar com grandes deformações, superfícies livres e geometrias complexas.

Diferentemente dos métodos baseados em malha fixa, o SPH representa o domínio por um conjunto discreto de partículas que carregam propriedades físicas, como massa, densidade, pressão e velocidade. Essas partículas interagem entre si por meio de funções de suavização (*kernels*), permitindo a aproximação das variáveis de campo e de suas derivadas a partir das

Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

contribuições das partículas vizinhas. Essa característica confere ao SPH maior flexibilidade na modelagem de sistemas dinâmicos não lineares, nos quais métodos tradicionais podem apresentar limitações.

Diversos estudos demonstram a eficiência do SPH em problemas de engenharia, biomecânica, geofísica e computação científica (Monaghan, 1992; Liu, W.; Liu, S., 2003; Violeau, 2012). Trabalhos mais recentes destacam sua implementação computacional em frameworks de código aberto, como o PySPH, que possibilitam a realização de simulações robustas e escaláveis, com suporte à paralelização e visualização do comportamento das partículas ao longo do tempo (Ramachandran *et al.,* 2021).

No contexto deste trabalho, o SPH é explorado além de suas aplicações tradicionais em simulação de fluidos, sendo utilizado como base conceitual para a resolução de problemas de otimização. A analogia entre o escoamento de partículas sob ação da gravidade e a busca por mínimos em superfícies matematicamente descritas permite investigar o potencial do SPH como uma técnica alternativa para localizar mínimos globais em funções multimodais.

Otimização baseada em partículas

Em problemas de otimização, o objetivo consiste em encontrar pontos que minimizem ou maximizem uma função objetivo definida sobre um determinado domínio. Métodos baseados em partículas destacam-se por sua robustez em cenários caracterizados por funções não convexas, multimodais ou com gradientes difíceis de estimar.

Neste contexto, introduz-se o conceito de função de *fitness*, responsável por avaliar a qualidade de cada solução candidata no processo de otimização. A partir de uma formulação baseada nos princípios do método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), é possível estimar o gradiente interpolado da função de *fitness*, permitindo orientar o deslocamento das partículas no espaço de busca sem a necessidade do cálculo explícito de derivadas analíticas, conforme apresentado na Equação (4).

$$\left\langle \vec{\nabla} f(\vec{r}) \right\rangle = \int \int \cdots \int_{\Omega} \vec{\nabla} f(\vec{r}\,') \, W(\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|, h) \, d^n \vec{r} \tag{4}$$

A consolidação dessa abordagem resulta na definição do gradiente suavizado (*Smoothed Gradient* – GS), o qual define formalmente o gradiente da função de *fitness* a partir de uma interpolação baseada em SPH. Essa formulação fornece a direção de busca ótima para a minimização da função objetivo e é apresentada na Equação (5).

$$\left\langle \vec{\nabla} f(\vec{r}) \right\rangle = - \int \int \cdots \int_{\Omega} f(\vec{r}\,') \, \vec{\nabla} \left[\frac{1}{\pi^{\frac{n}{2}} h^n} \exp\left(- \frac{\|\vec{r} - \vec{r}\,'\|^2}{h^2} \right) \right] d^n \vec{r} \tag{5}$$

Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

Ressalta-se que a Equação (5) possui caráter estritamente conceitual no contexto deste referencial teórico, pois descreve o mecanismo geral de avaliação e orientação das partículas no espaço de busca. A definição das funções específicas a serem otimizadas, bem como das funções de *benchmark* utilizadas nos experimentos numéricos, é apresentada exclusivamente na seção de Metodologia.

O processo de otimização consiste em maximizar ou minimizar uma função objetivo, buscando soluções ótimas em um determinado espaço de busca. Problemas de otimização estão presentes em diversas áreas da ciência e da engenharia, frequentemente caracterizados por funções não lineares, com múltiplos mínimos locais e, em muitos casos, sem disponibilidade explícita do gradiente.

Nesse cenário, métodos de otimização baseados em partículas têm se mostrado especialmente adequados, pois não dependem diretamente de derivadas da função objetivo. Esses métodos utilizam informações coletivas de um conjunto de partículas para explorar o espaço de busca, permitindo maior robustez frente a paisagens complexas e não convexas. A literatura recente destaca a crescente popularidade de algoritmos inspirados na natureza, em função de sua simplicidade conceitual e bom desempenho computacional (Azrag *et al.,* 2020).

A utilização de técnicas baseadas em partículas é particularmente relevante quando se dispõe apenas de amostras da função, ou quando o cálculo do gradiente é inviável ou instável. Nessas situações, abordagens numéricas alternativas tornam-se essenciais para a identificação de soluções satisfatórias.

Particle Swarm Optimization (PSO)

O *Particle Swarm Optimization* (PSO), proposto por Kennedy e Eberhart (1995), é um algoritmo de otimização baseado em enxame de partículas inspirado no comportamento coletivo observado em sistemas naturais. Cada partícula representa uma possível solução do problema e ajusta sua posição no espaço de busca a partir de informações próprias e do melhor desempenho global do enxame.

O PSO destaca-se por sua simplicidade de implementação, baixo custo computacional e eficiência em problemas de otimização global. Estudos indicam sua aplicabilidade em contextos complexos, incluindo problemas de otimização não linear com restrições, nos quais o espaço de busca apresenta múltiplos ótimos locais (Tseng *et al.,* 2021).

No presente trabalho, o PSO é adotado como método de referência, permitindo uma análise comparativa com a abordagem baseada em SPH. Essa comparação possibilita avaliar a viabilidade do uso do SPH como técnica de otimização, considerando critérios de precisão e desempenho na localização de mínimos globais.

Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

Função de *fitness* e funções de *benchmark*

A função de *fitness*, ou função de aptidão, é utilizada para avaliar a qualidade das soluções candidatas em um processo de otimização. Ela fornece uma medida quantitativa do quão adequada é uma determinada solução em relação ao objetivo proposto, orientando a evolução das partículas ao longo do processo iterativo.

Em problemas de otimização global, é comum o uso de funções de *benchmark* para avaliar o desempenho de diferentes algoritmos. Essas funções são cuidadosamente definidas para apresentar características desafiadoras, como múltiplos mínimos locais e um único mínimo global, permitindo uma análise sistemática da robustez e eficiência dos métodos estudados.

Neste trabalho, são consideradas funções de *benchmark* amplamente utilizadas na literatura, como as funções de Perm e de Griewank, além de funções univariadas adaptadas. A escolha dessas funções permite avaliar a capacidade do SPH em identificar corretamente o mínimo global, bem como comparar seus resultados com aqueles obtidos pelo PSO, fornecendo subsídios para a análise crítica da abordagem proposta.

3. MÉTODOS

Neste estudo, propõe-se a aplicação do método *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) como uma abordagem numérica para a determinação de mínimos globais de funções matemáticas. A metodologia adotada tem como objetivo avaliar a viabilidade do SPH, tradicionalmente empregado em problemas de dinâmica dos fluidos, como ferramenta alternativa para problemas de otimização.

Inicialmente, são definidas as funções de *benchmark* utilizadas nos experimentos, escolhidas por apresentarem múltiplos mínimos locais e um único mínimo global, característica essencial para a avaliação do desempenho de algoritmos de otimização. Em seguida, descreve-se o procedimento de simulação empregado com o método SPH, bem como a estratégia utilizada para a identificação dos pontos de mínimo global. Por fim, apresenta-se a técnica *Particle Swarm Optimization* (PSO), adotada como base comparativa.

Funções de *Benchmark*

As funções de *benchmark* desempenham papel fundamental na avaliação de algoritmos de otimização, pois permitem a análise controlada do desempenho, robustez e capacidade de generalização das técnicas empregadas. Neste trabalho, foram selecionadas funções amplamente utilizadas na literatura de Otimização Global, contemplando problemas multimodais e, em alguns casos, multidimensionais.

ISSN: 2675-6218 - RECIMA21
Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

Essas funções fornecem cenários com topologias de busca complexas, permitindo investigar a eficiência do SPH na localização do mínimo global em situações em que há forte presença de mínimos locais.

Função de Perm

A Função de Perm é uma função *benchmark* clássica utilizada para testar algoritmos de otimização global, devido à sua elevada multimodalidade. Sua formulação matemática é apresentada na Equação (6), e seu mínimo global ocorre em um ponto conhecido do domínio.

$$f(x) = \sum_{i=1}^{d} \left(\sum_{j=1}^{d} (j + \beta)\left(x_j^i - \frac{1}{j^i} \right) \right)^2 \quad x_i \in [-d, d], \forall\, i = 1, 2, 3 \ldots, d \tag{6}$$

Função de Griewank

A Função de Griewank caracteriza-se por combinar termos quadráticos e trigonométricos, resultando em uma paisagem de otimização altamente complexa, com múltiplos mínimos locais. Essa função é frequentemente empregada para avaliar a capacidade de algoritmos em evitar convergência prematura. Sua expressão matemática é apresentada na Equação (7), sendo o mínimo global localizado em x = {0, …, 0}.

$$f(x) = \frac{1}{4000} \sum_{i=1}^{n} (x_i - 100)^2 - \prod_{i=1}^{n} cos\left(\frac{x_i - 100}{\sqrt{i}} \right) + 1 \tag{7}$$

Funções de Teste Univariado

Além das funções clássicas, foram selecionadas funções de teste univariado com comportamento multimodal, extraídas da literatura e de bases de dados especializadas em funções de *benchmark*. Essas funções permitem analisar o comportamento do método SPH em problemas de menor dimensionalidade, mantendo, entretanto, elevada complexidade topológica.

As funções originais apresentam valores ótimos globais negativos. Para fins de padronização e comparação direta dos resultados, essas funções foram adaptadas por meio da adição de constantes, de modo que o valor mínimo global fosse igual a zero.

As funções adaptadas são apresentadas nas Equações (8) a (11).

$$f problema\ 02\,(x) = sin(x) + sin\left(\frac{10}{3}x\right) + 1,89959 \tag{8}$$

$$f problema\ 07\,(x) = sin(x) + sin\left(\frac{10}{3}x\right) + log(x) - 0,84x + 3 + 1,6013 \tag{9}$$

$$f problema\ 12\,(x) = sin^3(x) + cos^3(x) + 1 \tag{10}$$

$$f problema\ 14\,(x) = -e^{-x} sin(2\pi x) + 0,788685 \tag{11}$$

ISSN: 2675-6218 - RECIMA21

Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

Procedimento de simulação com SPH

O método SPH é um método numérico Lagrangiano baseado em partículas, no qual o domínio do problema é discretizado em um conjunto de partículas que transportam propriedades físicas e interagem entre si por meio de funções de suavização. Neste trabalho, o SPH foi empregado para simular o escoamento de partículas fluidas sobre superfícies sólidas representadas pelas funções de *benchmark*.

As simulações foram realizadas em duas dimensões (2D), visando reduzir o custo computacional e enfatizar o caráter de prova de conceito da abordagem proposta. Inicialmente, um conjunto de partículas fluidas é posicionado acima da superfície correspondente à função de *benchmark*. Sob a ação da gravidade, as partículas escorrem sobre essa superfície e tendem a se acumular nas regiões associadas aos valores mínimos da função.

Ao longo da simulação, são monitoradas as posições das partículas, permitindo identificar aquela que atinge o menor valor de altura em relação à superfície sólida. Esse ponto é interpretado como a aproximação numérica do mínimo global da função no domínio considerado.

A implementação do método SPH foi realizada utilizando a biblioteca PySPH, um *framework open-source* em Python que oferece suporte à paralelização, balanceamento dinâmico de carga e ferramentas de visualização gráfica. Para a análise visual da dinâmica do sistema, foi utilizado o visualizador *Particle View*, que permite acompanhar o comportamento das partículas ao longo do tempo.

O fluxograma geral do processo de simulação é apresentado na Figura 1, contemplando as etapas de inicialização, execução das interações entre partículas, evolução temporal do sistema e identificação do ponto de mínimo global.

Figura 1. Fluxograma da simulação PySPH aplicada à busca de mínimos de funções matemáticas



Fonte: Elaborado pelos autores.

ISSN: 2675-6218 - RECIMA21
Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

Base comparativa: *Particle Swarm Optimization* (PSO)

Com o objetivo de validar os resultados obtidos pelo método SPH, adotou-se o algoritmo *Particle Swarm Optimization* (PSO) como técnica de referência. O PSO é um algoritmo clássico da Computação Evolutiva, amplamente estudado e reconhecido por sua eficiência na resolução de problemas de otimização global.

Ambos os métodos, SPH e PSO, foram aplicados às mesmas funções de *benchmark*, sob condições semelhantes de execução, como limites do domínio de busca e critérios de parada. Essa abordagem permite uma comparação direta e equilibrada entre os desempenhos, evidenciando as potencialidades e limitações de cada técnica.

Os resultados obtidos a partir dessa comparação são apresentados e discutidos na seção seguinte.

4. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os resultados apresentados nesta seção referem-se à aplicação da técnica baseada em *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH), implementada no *framework* PySPH, e do algoritmo *Particle Swarm Optimization* (PSO), com o objetivo de identificar o mínimo global de diferentes funções de *benchmark*. As funções analisadas incluem a função Perm, a função Griewank e um conjunto de funções de Teste Univariado (Problemas 02, 07, 12 e 14). O foco desta análise é avaliar a capacidade de cada método em localizar os mínimos globais, bem como comparar o desempenho e a precisão das abordagens.

Funções de otimização antes da simulação no PySPH

Antes do início das simulações, as funções de otimização foram representadas por meio de partículas no ambiente do PySPH *Particle View*. Nessa etapa, as partículas sólidas formam as superfícies correspondentes às funções de *benchmark*, enquanto as partículas fluidas são inicialmente distribuídas no domínio de simulação, confinadas por paredes laterais para evitar a dispersão do fluido fora da região de interesse.

As representações iniciais das funções Perm, Griewank e dos Problemas 02, 07, 12 e 14 de Teste Univariado são ilustradas nas Figuras: 2–7. Em todas as funções analisadas, o objetivo teórico da simulação consiste em conduzir as partículas fluidas até a região correspondente ao valor mínimo da função, conforme definido na etapa metodológica.

ISSN: 2675-6218 - RECIMA21
Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

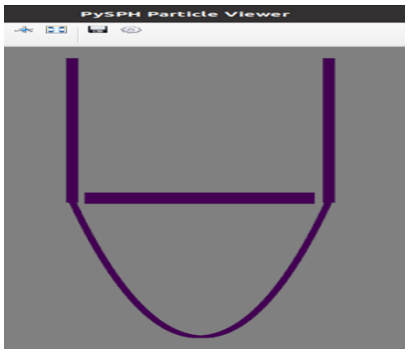


Figura 2
Função de Perm

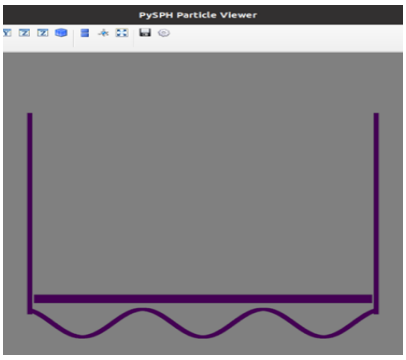


Figura 3
Função de Griewank

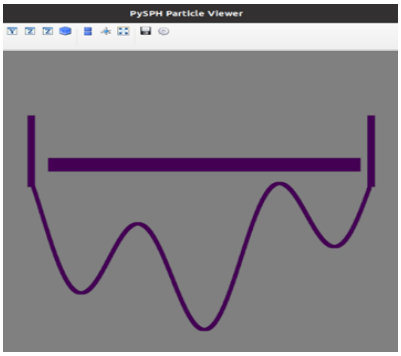


Figura 4
Função do Problema 02
Teste Univariado

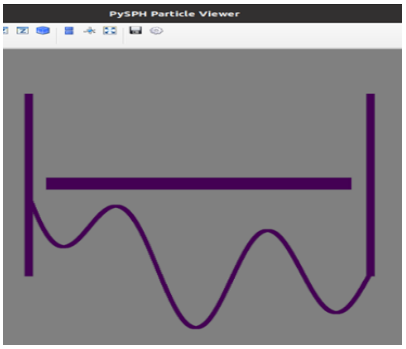


Figura 5
Função do Problema 07
Teste Univariado

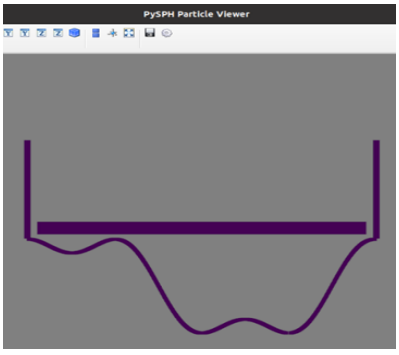


Figura 6
Função do Problema 12
Teste Univariado

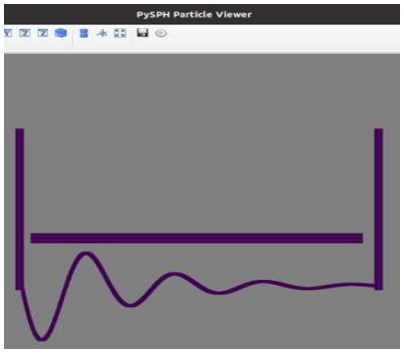


Figura 7
Função do Problema 14
Teste Univariado

ISSN: 2675-6218 - RECIMA21
Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

Funções de otimização após a simulação no PySPH

Após o início das simulações no PySPH, as partículas fluidas passaram a interagir com as superfícies das funções de *benchmark*, evoluindo dinamicamente sob a ação das forças modeladas pelo método SPH. Ao longo do tempo, observou-se o escoamento das partículas em direção às regiões de menor valor da função, caracterizando o processo de otimização.

Os resultados visuais das simulações, apresentados nas Figuras: 8–13, indicam que as partículas convergiram para valores de x e y próximos aos mínimos teóricos de cada função. Para a função Griewank, o mínimo global ocorre em x=0 e y=0. Já para a função Perm e para os testes univariados, os valores ideais de x são específicos para cada função, enquanto o valor ideal de y permanece igual a zero em todos os casos.

Esses resultados evidenciam que o método SPH, tradicionalmente empregado em simulações físicas, mostrou-se eficaz na identificação de mínimos globais em problemas de otimização, mesmo em funções multimodais.

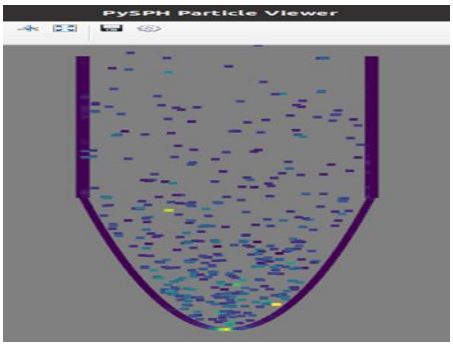


Figura 8
Função de Perm

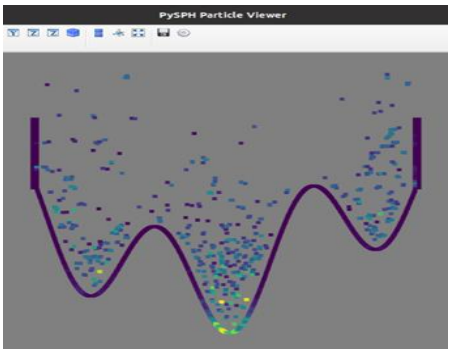


Figura 9
Função de Griewank

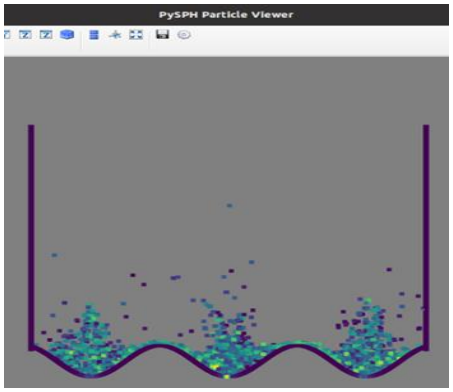


Figura 10
Função do Problema 02
Teste Univariado

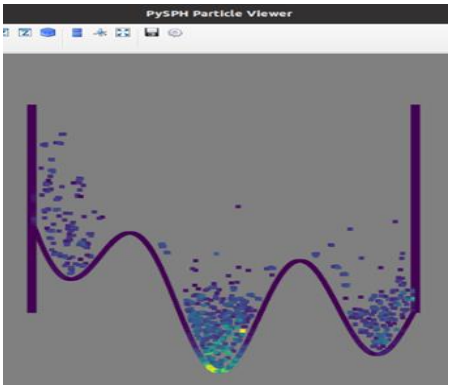


Figura 11
Função do Problema 07
Teste Univariado

ISSN: 2675-6218 - RECIMA21
Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

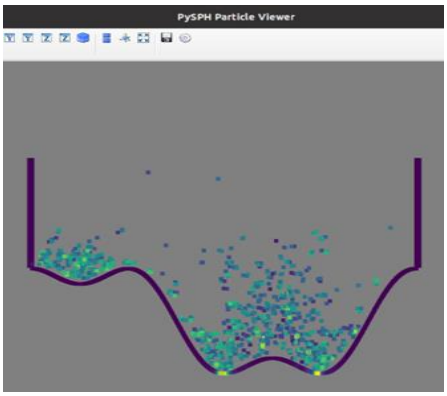


Figura 12
Função do Problema 12
Teste Univariado

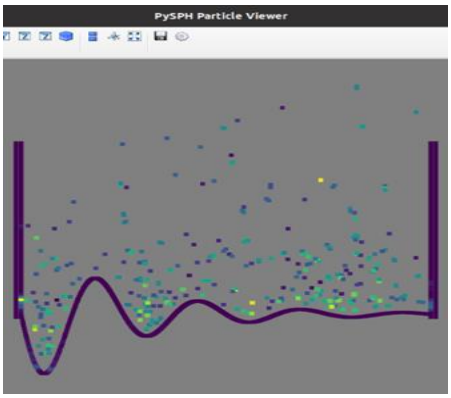


Figura 13
Função do Problema 14
Teste Univariado

Funções de otimização após a simulação no PSO

Com o objetivo de estabelecer uma base comparativa, as mesmas funções de *benchmark* foram também simuladas utilizando o algoritmo PSO. Nesse caso, as partículas evoluem de forma estocástica, atualizando suas posições com base nas melhores soluções individuais e globais encontradas ao longo das iterações.

Os resultados obtidos com o PSO são apresentados nas Figuras: 14–19, nas quais o eixo horizontal representa o número de iterações e o eixo vertical corresponde ao valor da função objetivo. Observa-se que, para todas as funções analisadas, o PSO convergiu rapidamente para valores próximos ao mínimo global, sendo necessárias, no máximo, 50 iterações para atingir a convergência.

ISSN: 2675-6218 - RECIMA21
Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

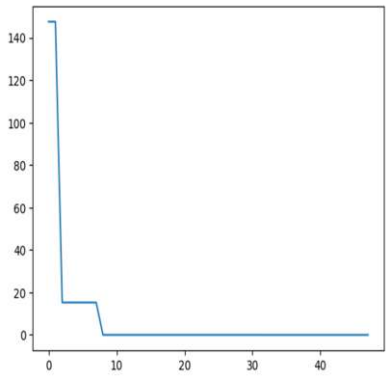


Figura 14
Função de Perm – PSO

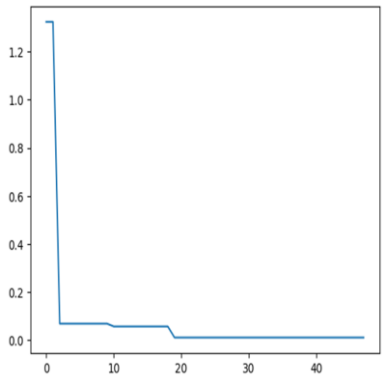


Figura 15
Função de Griewank – PSO

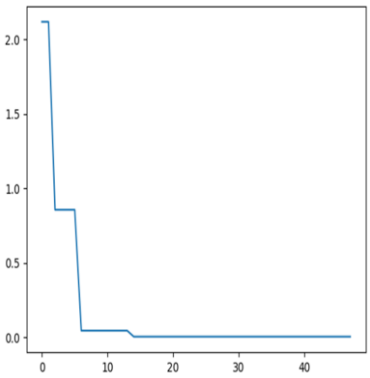


Figura 16
Função do Problema 02
Teste Univariado – PSO

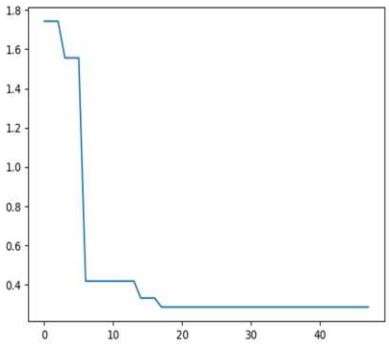


Figura 17
Função do Problema 07
Teste Univariado – PSO

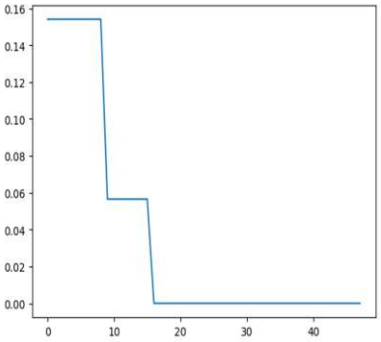


Figura 18
Função do Problema 12
Teste Univariado – PSO

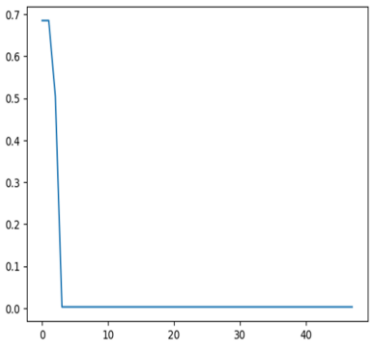


Figura 19
Função do Problema 14
Teste Univariado – PSO

Análise dos resultados obtidos com o PySPH

Os resultados quantitativos das simulações realizadas com o PySPH são apresentados na Tabela 1. Para cada função analisada, são informados o número de interações necessárias, os valores finais encontrados para x e y, o valor da função calculado a partir dessas posições e o erro absoluto em relação ao valor mínimo teórico.

De modo geral, os resultados indicam que o método PySPH foi capaz de localizar os mínimos globais das funções estudadas com elevada precisão. Os erros absolutos obtidos apresentaram ordens de grandeza variando entre 10^{-8} e 10^{-6}, demonstrando a consistência e a estabilidade do método, ainda que à custa de um maior número de interações e, consequentemente, de um custo computacional mais elevado.

ISSN: 2675-6218 - RECIMA21
Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

Tabela 1. Resultados das Simulações PySPH

FUNÇÕES	INT.	X ENCONTRADO	Y ENCONTRADO	CÁLCULO DA FUNÇÃO COM O X ENCONTRADO	RESULTADO MÍNIMO TEÓRICO PARA A FUNÇÃO	VALOR DO ERRO ABSOLUTO DA DIFERENÇA
Perm	4146	1,00095	$5{,}703 \times 10^{-2}$	$2{,}043 \times 10^{-6}$	0	$2{,}043 \times 10^{-6}$
Griewank	2821	0,00848	$2{,}440 \times 10^{-2}$	$1{,}799 \times 10^{-8}$	0	$1{,}799 \times 10^{-8}$
Problema 02 - Teste Univariado	3337	5,14589	$8{,}269 \times 10^{-2}$	$-1{,}989 \times 10^{-7}$	0	$1{,}989 \times 10^{-7}$
Problema 07 - Teste Univariado	3229	5,19957	$5{,}611 \times 10^{-2}$	$-7{,}282 \times 10^{-6}$	0	$7{,}282 \times 10^{-6}$
Problema 12 - Teste Univariado	2863	3,14368	$2{,}463 \times 10^{-2}$	$6{,}539 \times 10^{-6}$	0	$6{,}539 \times 10^{-6}$
Problema 14 - Teste Univariado	2306	0,22512	$8{,}781 \times 10^{-2}$	$5{,}428 \times 10^{-7}$	0	$5{,}428 \times 10^{-7}$

Análise dos resultados obtidos com o PSO

Para o PSO, foram realizadas dez execuções independentes para cada função, considerando o caráter estocástico do algoritmo. A partir dessas execuções, foram calculadas a média e o desvio padrão dos valores encontrados, conforme apresentado nas Tabelas 2.

Os resultados evidenciam que o PSO apresentou excelente desempenho na localização dos mínimos globais, com erros absolutos inferiores aos observados no PySPH em diversos casos. As ordens de grandeza dos erros variaram entre 10^{-16} e 10^{-6}, indicando elevada precisão numérica. Além disso, o PSO demandou um número significativamente menor de interações, o que ressalta sua maior eficiência computacional em comparação ao método SPH.

ISSN: 2675-6218 - RECIMA21
Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

Tabela 2. Resultados das Simulações do PSO

FUNÇÕES	INT.	X ENCONTRADO	Y ENCONTRADO	CÁLCULO DA FUNÇÃO COM O X ENCONTRADO	RESULTADO MÍNIMO TEÓRICO PARA A FUNÇÃO	VALOR DO ERRO ABSOLUTO DA DIFERENÇA	DESVIO PADRÃO
Perm	21	1,000000009	$6,981 \times 10^{-14}$	$1,823 \times 10^{-16}$	0	$1,823 \times 10^{-16}$	$1,85 \times 10^{-7}$
Griewank	24	-0,000000240	$7,475 \times 10^{-13}$	$1,439 \times 10^{-17}$	0	$1,439 \times 10^{-17}$	$1,26 \times 10^{-6}$
Problema 02 - Teste Univariado	24	5,145735279	$-3,492 \times 10^{-7}$	$-3,492 \times 10^{-7}$	0	$3,492 \times 10^{-7}$	$3,53 \times 10^{-7}$
Problema 07 - Teste Univariado	25	5,199778236	$-7,546 \times 10^{-6}$	$-7,546 \times 10^{-6}$	0	$7,546 \times 10^{-6}$	$3,19 \times 10^{-7}$
Problema 12 - Teste Univariado	29	3,141592881	$7,234 \times 10^{-13}$	$7,760 \times 10^{-14}$	0	$7,760 \times 10^{-14}$	$6,91 \times 10^{-7}$
Problema 14 - Teste Univariado	34	0,224880355	$-3,874 \times 10^{-7}$	$-3,569 \times 10^{-7}$	0	$3,569 \times 10^{-7}$	$8,03 \times 10^{-8}$

Comparação entre os métodos SPH e PSO

A análise conjunta dos resultados evidencia que ambos os métodos foram bem-sucedidos na identificação dos mínimos globais das funções de *benchmark* analisadas. O SPH demonstrou robustez na exploração do espaço de busca, mesmo em funções multimodais, apresentando resultados consistentes, embora com maior custo computacional. Por outro lado, o PSO destacou-se pela rapidez de convergência e pela obtenção de erros absolutos menores em diversas funções, ainda que apresente maior sensibilidade à escolha de parâmetros devido à sua natureza estocástica.

A comparação direta entre os métodos, apresentada na Tabela 3, permite observar que, embora o PSO apresente melhor desempenho em termos de eficiência computacional, o SPH constitui uma alternativa robusta e conceitualmente distinta para problemas de otimização, especialmente quando se busca uma abordagem baseada em analogias físicas.

ISSN: 2675-6218 - RECIMA21
Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

Tabela 3. Resultados de todas as simulações

FUNÇÕES	INT.		X ENCONTRADO		Y ENCONTRADO		CÁLCULO DA FUNÇÃO COM O X ENCONTRADO		RESULTADO MÍNIMO TEÓRICO PARA A FUNÇÃO		VALOR DO ERRO ABSOLUTO DA DIFERENÇA.		DESVIO PADRÃO	
	PySPH	PSO	PySPH	PSO	PySPH	PSO	PySPH	PSO	PySPH	PSO	PySPH	PSO	PySPH	PSO
Perm	4146	21	1,00095	1,000000009	$5,703 \times 10^{-2}$	$6,981 \times 10^{-14}$	$2,043 \times 10^{-6}$	$1,823 \times 10^{-16}$	0	0	$2,043 \times 10^{-6}$	$1,823 \times 10^{-16}$	____	$1,85 \times 10^{-7}$
Griewank	2821	24	0,00848	-0,000000240	$2,440 \times 10^{-2}$	$7,475 \times 10^{-13}$	$1,799 \times 10^{-8}$	$1,439 \times 10^{-17}$	0	0	$1,799 \times 10^{-8}$	$1,439 \times 10^{-17}$	____	$1,26 \times 10^{-6}$
Problema 02 - Teste Univariado	3337	24	5,14589	5,145735279	$8,269 \times 10^{-2}$	$-3,492 \times 10^{-7}$	$-1,989 \times 10^{-7}$	$-3,492 \times 10^{-7}$	0	0	$1,989 \times 10^{-7}$	$3,492 \times 10^{-7}$	____	$3,53 \times 10^{-7}$
Problema 07 - Teste Univariado	3229	25	5,19957	5,199778236	$5,611 \times 10^{-2}$	$-7,546 \times 10^{-6}$	$-7,282 \times 10^{-6}$	$-7,546 \times 10^{-6}$	0	0	$7,282 \times 10^{-6}$	$7,546 \times 10^{-6}$	____	$3,19 \times 10^{-7}$
Problema 12 - Teste Univariado	2863	29	3,14368	3,141592881	$2,463 \times 10^{-2}$	$7,234 \times 10^{-13}$	$6,539 \times 10^{-6}$	$7,760 \times 10^{-14}$	0	0	$6,539 \times 10^{-6}$	$7,760 \times 10^{-14}$	____	$6,91 \times 10^{-7}$
Problema 14 - Teste Univariado	2306	34	0,22512	0,224880355	$8,781 \times 10^{-2}$	$-3,874 \times 10^{-7}$	$5,428 \times 10^{-7}$	$-3,569 \times 10^{-7}$	0	0	$5,428 \times 10^{-7}$	$3,569 \times 10^{-7}$	____	$8,03 \times 10^{-8}$

ISSN: 2675-6218 - RECIMA21

Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

Os experimentos realizados com o PySPH e o PSO confirmaram que ambos os métodos são eficazes na busca por mínimos globais em funções de otimização. Os resultados apresentados na Tabela 3 evidenciam que o PSO alcançou erros absolutos menores e convergiu com um número reduzido de interações, refletindo sua elevada eficiência computacional. Por outro lado, o SPH demonstrou desempenho consistente mesmo em funções multimodais, apresentando maior robustez frente a superfícies complexas, ainda que à custa de maior custo computacional. Esses resultados indicam que a escolha entre SPH e PSO deve considerar as características específicas do problema, como complexidade da função, dimensionalidade do espaço de busca e requisitos de precisão e desempenho computacional.

5. CONSIDERAÇÕES

O presente trabalho investigou a utilização da técnica *Smoothed Particle Hydrodynamics* (SPH) como uma abordagem alternativa para a determinação de mínimos globais de funções matemáticas, a partir da analogia física do escoamento de um fluido sobre uma superfície sob a ação da gravidade. Ao modelar as funções de interesse como superfícies sólidas e acompanhar a dinâmica das partículas, foi possível identificar numericamente os pontos correspondentes aos mínimos globais no domínio de busca.

A implementação computacional foi realizada por meio do f*ramework* PySPH, que se mostrou adequado para a modelagem e execução das simulações propostas, oferecendo recursos eficientes para o tratamento da dinâmica de partículas e para a visualização dos resultados. De modo geral, os experimentos apresentaram erros absolutos da ordem de 10^{-6}, indicando boa precisão numérica e confirmando a viabilidade da abordagem proposta como prova de conceito.

Uma vez que não foram identificados na literatura trabalhos que empreguem o SPH diretamente como método de otimização para a busca de mínimos de funções, este estudo contribui ao explorar uma nova perspectiva para o uso dessa técnica, tradicionalmente aplicada à dinâmica de fluidos. Para fins de validação e comparação, o algoritmo *Particle Swarm Optimization* (PSO) foi utilizado como método de referência, por se tratar de uma técnica amplamente consolidada na área de otimização global.

A análise comparativa indicou que ambos os métodos foram capazes de localizar os mínimos das funções de *benchmark* avaliadas. O PSO apresentou maior eficiência computacional e, em geral, maior precisão numérica, enquanto o SPH demonstrou maior robustez conceitual, fundamentada em princípios físicos e em uma formulação teórica que favorece a convergência para o mínimo global dentro do domínio explorado. Embora o custo computacional do SPH seja superior, essa característica não deve ser vista apenas como uma limitação, mas como parte do compromisso entre robustez, interpretabilidade física e desempenho.

ISSN: 2675-6218 - RECIMA21
Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

Observou-se ainda que a baixa dimensionalidade e a complexidade moderada das funções de *benchmark* podem favorecer o desempenho do PSO. Dessa forma, investigações futuras envolvendo funções de maior complexidade e dimensionalidade são necessárias para caracterizar com maior profundidade as condições em que o SPH pode se destacar como método de otimização.

Como trabalhos futuros, sugere-se a exploração de variações do método SPH com estratégias de otimização dos parâmetros de kernel, bem como sua aplicação em problemas dinâmicos, nos quais a superfície de escorrimento varia ao longo do tempo. Outra perspectiva promissora consiste na integração do SPH com redes neurais artificiais, tratando a função de perda como a superfície de otimização, permitindo que o processo de treinamento seja guiado pela dinâmica das partículas e abrindo novas possibilidades para métodos híbridos de otimização.

REFERÊNCIAS

ADAMI, Stefan; HU, Xiangyu; ADAMS, Nikolaus A. A transport-velocity formulation for smoothed particle hydrodynamics. **Journal of Computational Physics**, v. 241, p. 292–307, 2013.

ANTONY, Justin; MANIYERI, Ranjith. Numerical simulation of fluid flow in a channel using smoothed particle hydrodynamics. *In:* **Proceedings of 65th Congress of ISTAM**, 2020. Disponível em: https://istam.iitkgp.ac.in/resources/2020/proceedings/Full_paper/FM/90fullpaper.pdf. Acesso em: 9 set. 2025.

ANTUONO, M.; DI MASCIO, A.; ASADI, H. *et al.* Smoothed particle hydrodynamics method from a large eddy simulation perspective: generalization to a quasi-Lagrangian model. **Physics of Fluids**, v. 33, n. 1, p. 015102, 2021.

ARORA, Krishan; KUMAR, Ashok; KAMBOJ, Vikram Kumar et al. Optimization methodologies and testing on standard benchmark functions of load frequency control for interconnected multi-area power system in smart grids. **Mathematics**, v. 8, n. 6, p. 980, 2020.

ASADI, Hossein; RIAZI, Masoud; MOHAMMADI, Masoud. Investigation of hydrodynamically dominated membrane rupture using smoothed particle hydrodynamics–finite element method. **Fluids**, v. 4, n. 3, p. 149, 2019.

ATLURI, Satya N.; ZHU, Tulong. A new meshless local Petrov–Galerkin (MLPG) approach in computational mechanics. **Computational Mechanics**, v. 22, n. 2, p. 117–127, 1998.

AZRAG, Mohammed Adam Kunna; KADIR, Tuty Asmawaty Abdul; ALI, Noorlin Mohd. A comparison of particle swarm optimization and global African buffalo optimization. *In:* IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. IOP Publishing, 2020. p. 012034.

BASHIR, Hassan Abdullahi. *Diversity control in evolutionary computation using asynchronous dual-populations with search space partitioning*. **Nigerian Journal of Technological Development**, v. 17, n. 3, p. 175–188, 2020.

Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

BELYTSCHKO, Ted; LU, Yun Yun; GU. Lei. Element-free Galerkin methods. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 37, n. 2, p. 229–256, 1994.

CISTERNAS, Luis A.; LUCAY, Freddy A.; BOTERO, Yesica L. Trends in modeling, design, and optimization of multiphase systems in minerals processing. **Minerals**, v. 10, n. 1, p. 22, 2019.

CLEARY, Paul W. *et al*. Inclusion of incremental damage breakage of particles and slurry rheology into a particle scale multiphase model of a SAG mill. **Minerals Engineering**, v. 128, p. 92–105, 2018.

CLEARY, Paul W.; SINNOTT, Matt; MORRISON, Rob. Prediction of slurry transport in SAG mills using SPH fluid flow in a dynamic DEM based porous media. **Minerals Engineering**, v. 19, n. 15, p. 1517–1527, 2006.

CUNDALL, P. A.; STRACK, O. D. L. A discrete numerical model for granular assemblies. **Géotechnique**, v. 29, n. 1, p. 47–65, 1979.

DE ANDA-SUÁREZ, Juan et al. Evolutionary Gaussian-gradient: a new optimization algorithm for the electromechanical design of gravitational batteries. *In:* **Hybrid Intelligent Systems Based on Extensions of Fuzzy Logic, Neural Networks and Metaheuristics**. Cham: Springer Nature Switzerland, 2023. p. 347–364.

DOMÍNGUEZ, J. M. *et al.* Neighbour lists in smoothed particle hydrodynamics. **International Journal for Numerical Methods in Fluids**, v. 67, n. 12, p. 2026–2042, 2011.

DUAN, Shaomi; LUO, Huilong; LIU, Haipeng. A multi-strategy seeker optimization algorithm for optimization constrained engineering problems. **IEEE Access**, v. 10, p. 7165–7195, 2022.

FUCHS, Sebastian L. *et al.* An SPH framework for fluid–solid and contact interaction problems including thermo-mechanical coupling and reversible phase transitions. **Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences**, v. 8, n. 1, p. 1–33, 2021.

GAO, Hongwei et al. Robust bacterial foraging algorithms based on few-excellent-individuals guidance strategy. **Sensors & Materials**, v. 32, 2020.

GINGOLD, Robert A.; MONAGHAN, Joseph J. Smoothed particle hydrodynamics: theory and application to non-spherical stars. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 181, n. 3, p. 375–389, 1977.

GOMEZ-GESTEIRA, Moncho et al. State-of-the-art of classical SPH for free-surface flows. **Journal of Hydraulic Research**, v. 48, n. sup1, p. 6–27, 2010.

GRANT-PETERS, Jonathan; HAUSER, Raphael. A seven-point algorithm for piecewise smooth univariate minimization. **arXiv preprint**, **arXiv:2012.06553**, 2020. Disponível em: https://arxiv.org/abs/2012.06553. Acesso em: 9 set. 2025.

HERNQUIST, Lars; KATZ, Neal. *TREESPH-A* unification of SPH with the hierarchical tree method. **Astrophysical Journal Supplement Series**, v. 70, p. 419–446, 1989.

HU, D. A. *et al.* A meshless local Petrov–Galerkin method for large deformation contact analysis of elastomers. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 31, n. 7, p. 657–666, 2007.

ISSN: 2675-6218 - RECIMA21

Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

INFINITY77. **A one-dimensional test functions platform with multiple local and global minima**. [S. l.]: INFINITY77, s. d. Disponível em: https://infinity77.net/global_optimization/test_functions_1d.html#d-test-functions. Acesso em: 18 dez. 2023.

KASHYAP, Katyayani; SHARMA, Tarun K.; RAJPUROHIT, Jitendra. Logistic map and wavelet transform based differential evolution. **International Journal of System Assurance Engineering and Management**, v. 11, p. 506–514, 2020.

KENNEDY, James; EBERHART, Russell. Particle swarm optimization. *In:* **Proceedings of ICNN'95-International Conference on Neural Networks - IEEE**, 1995. p. 1942–1948.

KOSCHIER, Dan et al. Smoothed particle hydrodynamics techniques for the physics-based simulation of fluids and solids. **arXiv preprint, arXiv:2009.06944**, 2020. Disponível em: https://arxiv.org/abs/2009.06944. Acesso em: 9 set. 2025.

LEVEQUE, Randall J. **Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002. Disponível em: https://link.springer.com/book/10.1007/978-0-8176-8394-8. Acesso em: 22 jun. 2025.

LIND, Steven J.; ROGERS, Benedict D.; STANSBY, Peter K. Review of smoothed particle hydrodynamics: towards converged Lagrangian flow modelling. **Proceedings of the Royal Society A**, v. 476, n. 2241, p. 20190801, 2020.

LIU, Gui-Rong; LIU, Moubin B. Smoothed particle hydrodynamics: a meshfree particle method. **World Scientific**, 2003.

LIU, Wing-Kam; LI, Shaofan; BELYTSCHKO, Ted. Moving least-square reproducing kernel methods (I) methodology and convergence. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 143, n. 1-2, p. 113–154, 1997.

LUCY, Leon B. A numerical approach to the testing of the fission hypothesis. **Astronomical Journal**, v. 82, p. 1013–1024, 1977.

MIRANDA, J. **Pyswarm**: Particle Swarm Optimization (PSO) for Python. [*S. l. s. n.*], s. d. Disponível em: https://github.com/tisimst/pyswarm. Acesso em: 27 jun. 2025.

MOHAMMADI, Masoud; RIAZI, Masoud. Applicable investigation of SPH in characterization of fluid flow in uniform and non-uniform periodic porous media. **Sustainability**, v. 14, n. 21, p. 14320, 2022.

MONAGHAN, Joe J. Smoothed particle hydrodynamics. **Annual Review of Astronomy and Astrophysics**, v. 30, p. 543–574, 1992.

MONAGHAN, Joe J. Smoothed particle hydrodynamics. **Reports on Progress in Physics**, v. 68, n. 8, p. 1703–1759, 2005.

MORTON, Guy M. **A computer oriented geodetic data base and a new technique in file sequencing**. [*S. l. s. n.*], 1966. Disponível em: https://apps.dtic.mil/sti/citations/AD0253260. Acesso em: 9 set. 2025.

ISSN: 2675-6218 - RECIMA21

Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

MOUNTRIS, Konstantinos A. *et al.* An explicit total Lagrangian fragile points method for finite deformation of hyperelastic materials. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 151, p. 255–264, 2023.

MYERS, Conner *et al.* A hybrid finite volume method and smoothed particle hydrodynamics approach for efficient and accurate blast simulations. **Frontiers in Physics**, v. 11, p. 1325294, 2024.

MYERS, Conner; PALMER, Todd; PALMER, Camille. A hybrid finite volume-smoothed particle hydrodynamics approach for shock capturing applications. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 417, p. 116412, 2023.

PAHLKE, Johannes; SBALZARINI, Ivo F. A unifying mathematical definition of particle methods. **IEEE Open Journal of the Computer Society**, 2023.

RAJA, Vijayakumar et al. Modeling and simulation of 3D food printing systems: scope, advances, and challenges. **Foods**, v. 12, n. 18, p. 3412, 2023.

RAMACHANDRAN, Prabhu et al. PySPH: a Python-based framework for smoothed particle hydrodynamics. **ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)**, v. 47, n. 4, p. 1–38, 2021.

RAMACHANDRAN, Prabhu; PURI, Kunal. Entropically damped artificial compressibility for SPH. **Computers & Fluids**, v. 179, p. 579–594, 2019.

SPRINGEL, Volker. The cosmological simulation code GADGET-2. **Monthly Notices of the Royal Astronomical Society**, v. 364, n. 4, p. 1105–1134, 2005.

TSENG, Hsuan-Yu et al. Particle swarm optimization for nonlinear constrained optimization problems. **IEEE Access**, v. 9, p. 124757–124767, 2021.

VACONDIO, Renato et al. Grand challenges for smoothed particle hydrodynamics numerical schemes. **Computational Particle Mechanics,** v. 8, p. 575–588, 2021.

VIOLEAU, Damien. **Fluid mechanics and the SPH method**: theory and applications. Oxford: Oxford University Press, 2012.

WANG, Chau-Shing et al. Process parameter prediction and modeling of laser percussion drilling by artificial neural networks. **Micromachines**, v. 13, n. 4, p. 529, 2022.

WANG, Mengdi et al. Thin-film smoothed particle hydrodynamics fluid. **ACM Transactions on Graphics (TOG)**, v. 40, n. 4, p. 1–16, 2021.

WU, Qiang; PENG, PiaoPiao; CHENG, YuMin. The interpolating element-free Galerkin method for elastic large deformation problems. **Science China Technological Sciences**, v. 64, n. 2, p. 364–374, 2021.

XI, Runping et al. Survey on smoothed particle hydrodynamics and the particle systems. **IEEE Access**, v. 8, p. 3087–3105, 2019.

YE, Ting et al. Smoothed particle hydrodynamics (SPH) for complex fluid flows: recent developments in methodology and applications. **Physics of Fluids**, v. 31, n. 1, p. 017101, 2019.

ISSN: 2675-6218 - RECIMA21

Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.

REVISTA CIENTÍFICA - RECIMA21 ISSN 2675-6218

ZHANG, Tingyu et al. SPH modeling of water-related natural hazards. **Scientific Journal of Technology**, v. 3, n. 9, p. 1–12, 2021.

ISSN: 2675-6218 - RECIMA21

Este artigo é publicado em acesso aberto (Open Access) sob a licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional (CC-BY), que permite uso, distribuição e reprodução irrestritos em qualquer meio, desde que o autor original e a fonte sejam creditados.